Chapter 0

はじめに

この本では，

- 動きのある現象をどのように数学で表すのか（定式化）
- 定式化したものをどのように解くのか（解法）

について取り組んでいきます．ここではまずはじめに，この本の全体の流れを説明し，前提として準備してほしい知識，さらに微分方程式がどのような分野に活かせるのかを述べます．

0.1 全体の流れ

定式化 (formulation) とは，「現象や問題を数式の形で表現すること」です．

数式で表したとき，その式を解く方法があれば，数式を解くことで元の現象がどのようになるかを理解できるようになります．「定式化」という用語を使っていなかったかもしれませんが，中学・高校で扱う数学の文章題や物理の問題は，この「現象を数式で表して，解く」という作業を行っていました．

本書で考えたい現象は「動きのある」ものです．まず，第 1 章では，定式化の第一歩として，日常使っている「速さ」の考え方から始めます．動きのある現象ということは速さがあるということですから，ここがスタートになります．速さは，素朴に「移動した距離」を「移動にかかった時間」で割ると求められるのですが，これを非常に短い一瞬の時間について求めようとすると，不都合がありました．そのために発明されたのが微分 (differential)†です．微分法の発明者の一人が，物理学者として有名なニュートン（図 0.1）であるのは，偶然ではなかったのです．

微分法を用いると，位置から速度 (velocity) を簡単に求めることができます．さらに，速度から加速度 (acceleration)（速度の変化率）も求められますし，その他の物

† differential は difference（差）の派生語です．

[redacted]

図 0.1　微分法を開発した，物理学者のニュートン[1]

理量 (physical quantity)† の変化率も求められます．このように，動きのある現象を表すために微分法が必須であること（言い換えると，そのために微分法が開発されたこと）について述べます．

また，高校で微分法と抱き合わせて現れる**積分** (integral) についても，図形の面積に基づく定義と，微分の逆演算になることをおさえておきます．積分を使うことで，速度から距離を求めることができるようになります．

第 2 章では，微分を含んだ方程式，つまり**微分方程式** (differential equation) として，さまざまな現象の規則が表されることを述べます．ここが本書における微分方程式による「定式化」の説明の本体になります．

物理（力学）でニュートンが提唱した運動方程式は

$$ma = F \quad (m：物体の質量，a：物体の加速度，F：物体にかかる力) \qquad (0.1)$$

と表されますが，加速度は物体の位置（$x(t)$ と書くことが多い）を 2 回微分して得られるので，これは微分を含んだ方程式（微分方程式）です．この章では，高校の力学で登場するさまざまな運動（自由落下，投げ上げ，ばね，振り子など）を示す微分方程式を示します．さらにそれだけではなく，

- 室内に置いたお湯の温度が変化する様子
- 電気回路にかけた電圧と電流の変化の様子
- 銀行に預けた預金と利息の関係
- ある地域に生息する生き物の個体数
- 伝染病の流行

など，力学から（さらにいうと，物理からも）離れたさまざまな現象も微分方程式で表されることを紹介します．とにかく第 2 章では，「いろいろな現象が微分を含んだ方程式（微分方程式）で定式化できる」ことを体感してください．そのためにも，本書

† 基本単位である長さ，質量，時間，電流やそれらを組み合わせた速度，圧力などを単位としてもつ量．物理学で扱われる変数．

では「定式化」を先にし，「解法」を後にした構成としています†．

第 3 章では，具体的な微分方程式の解法を学びます．ここが本書における「解法」の説明の本体です．すでに述べたように，微分方程式はさまざまな動きのある現象の規則を数式で表したものです．これを解くことにより，それらの現象の特徴を理解できたり，物事がこれからどのように動くのかというある種の「予知能力」を身につけたりすることができます．

第 2 章で具体例を示した微分方程式は，いくつかの基本的な形に分類されます．それぞれに対して一般的な解法を学び，具体的な現象の動きとどのように対応しているのかを紹介します．

第 4 章では，**ラプラス変換** (Laplace transform) を学びます．これも微分方程式の「解法」の一種です．微積分を必要とする微分方程式の解法から，見かけ上，微積分をなくし，四則演算を中心とする解法に変換する方法です．手計算で微分方程式を解くために非常に都合のよい道具であるとともに，工学で重要な**周波数** (frequency) の考え方で現象を扱う際に非常に強力な道具です．

0.2　学習にあたって

本書は 1 冊で必要な内容をすべて含んでいる，いわゆる “self-contained” な教科書を目指しましたが，やはり 1 冊の本に書ける内容は限られています．本書で書かれている下記の内容のうち理解が難しい内容があった場合，高校までの数学・理科（物理）の教科書などを参照されることをお勧めします．

- 速度の定義
- 直線（一次関数）の傾きの求め方と意味
- 複素数の計算（絶対値，偏角の定義と意味）
- 微分の計算（多項式，三角関数，指数・対数関数）
- 積分（多項式，三角関数，指数・対数関数）
- 物理（特に力学）の基礎的な知識
  - 運動方程式
  - 自由落下，投げ上げ，モンキーハンティング
  - 単振動，振り子，ばね
  - 電気回路（オームの法則，電磁誘導，コンデンサの充電）

† 数学的な観点からの微分方程式の教科書では，数学的な微分方程式の分類と対応する解法を並べたものが多く，「微分方程式は動きのある現象を表現するための道具である」ことを強調しているものは少ない印象です．

0.2.1　本書の使い方

本書を手にとっていただいた方にはいろいろな目的や背景をお持ちの方がいると思います．それぞれについて，私が提案する本書の使い方を示したいと思います（表 0.1）．

表 0.1　本書の使い方

目的	第1章	第2章	第3章	第4章
高校生だけど大学での勉強の内容を知りたい／高校で勉強する内容の使い方を知りたい	◎	○	△	△
理工系の専門科目での微分方程式を勉強したい／使い方を知りたい	○	◎	◎	△
理工系の専門科目で微分方程式と（そのうち）システム制御系の勉強をしたい	○	◎	◎	◎
微分方程式を計算できるようになりたい／とにかく微分方程式を解かなければいけない	△	△	◎	◎

◎：ここを目標にしてください　○：読んでください　△：余力があれば読んでください

これ以外にも，高校から大学初年度の数学・物理の学びなおしをしたい方にもご利用いただける内容になっています．

本書では極力，例や例題を使って，具体例をもとに説明しています．とくに，第 2 章は 30 以上の例・例題を利用し，さまざまな分野の現象が微分方程式として表現できることを解説しています．

具体的な解法を扱う第 3 章，第 4 章でも例題を通して解法を説明していますが，さらにこれらの章では一つの解法ごとに多くの演習問題を示しています．問題を自分で解いてみて，その時点で説明されている解法の練習をしてから次に進むことを強くお勧めします．

0.2.2　その他の分野とのかかわり

本書の内容について，高校から大学初年度までの基礎および大学で学ぶ専門知識（とくに，筆者の専攻である情報・電気・制御系を中心として）との関連を大まかに図 0.2 に示します．

高校から大学初年度まで　何よりも物理，とくに力学の知識が本書の内容の基礎となります．本来微分法と微分方程式は，力学の諸現象を適切に表そうという目的で発明されたことは，すでに述べました．しかし，高校では他の科目との兼ね合いから，微積分や微分方程式に基づいた物理学の教え方は（残念ながら）されません．物理の大半の事実を「公式」として「記憶」する高校生が多いのですが，「記憶」してきた知識を「理解」して整理するトレーニングを本書で行うことにより，高校での学習内容が

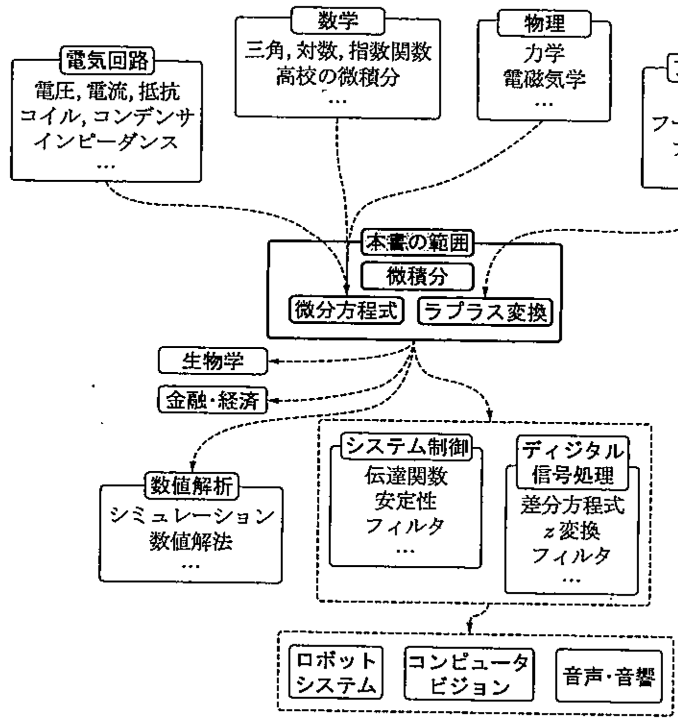


図 0.2　他分野とのかかわり

活かせるようになるでしょう．高校物理（力学）の諸公式は，単に定義から微積分を活用して導出したものにすぎないとあなたが実感できれば，本書は大成功を収めたことになります．

微積分や力学と直接かかわるのはもちろんですが，ラプラス変換を深く理解するためには，フーリエ解析（フーリエ級数展開，複素フーリエ級数展開，フーリエ変換など）の知識が大いに助けになるでしょう．フーリエ解析は，時間とともに変化する値（信号）を，周波数という観点で見るための道具です．

抵抗・コイル・コンデンサなどからなる電気回路に交流電圧をかけるという現象を定式化するとき，抵抗を拡張したインピーダンスを利用します．実は，これは特殊な条件を仮定して微分方程式を変形したものです．微分方程式を知らなくても，複素数の計算だけで回路の様子をわかるようにした便利な方法です．「微分方程式は難しいから，場合を絞って簡単にしてあげよう」という，親心のようなものだと思ってください．インピーダンスとラプラス変換はその結果が驚くほど似ていますから，電気回路のインピーダンスについて知っておくと，電気回路もラプラス変換もどちらも理解できてお得です．

大学専門課程以降　微分方程式とラプラス変換の知識が直接活きるのが，システム制御の分野です．高校までの物理は「見ているだけ」(条件を決めたら，モノが動いている様子を見ているだけ）であり，本書の内容もこの範囲を出ていませんが，システム制御では一歩突っ込んで「どのように動かすか」までを学びます．ロボットや自動車などのしくみや動かし方に関心がある人には必須の知識です．

ディジタル信号処理も微分方程式と少し関連があります．ディジタル信号処理では微分ではなく「差分」という，ほんの少しだけ違う計算を使うため，式の見た目や道具がかなり変わるのですが，本質的な部分はかなり共通しています．

これらの科目のさらに先には，画像，動画，音声などを加工し取り扱う「コンピュータビジョン」や「音声・音響情報処理」などがつながっています．皆さんが普段コンピュータや携帯電話で楽しんでいる画像や音声は，これらの技術を利用して加工され，皆さんのもとに届いています．

本書では，微分方程式を式変形で解く方法をおもに紹介しますが，それとは異なりコンピュータなどを利用して数値を求めながら解く方法もあります．このような方法は，「数値解析」とよばれる学問の一部です．運動を表す微分方程式をコンピュータで解くということは，つまり現実をコンピュータの中に再現することにほかなりません．一般に「シミュレーション」とよばれる技術で，製品の設計，ゲームの表現や天気予報など，幅広い分野に使われています．

本書では，生物学や金融（経済学）の一部の問題も微分方程式によって記述できることを紹介します．非常に単純にした例ではありますが，力学や電気とは一見異なるこれらの現象も表現できるように拡張されてきたことが，微積分および微分方程式の有用性を示しています．

数学や物理は，いろいろな手続きが難しく感じるかもしれません．しかし，どちらも根拠や原理を大事にして現実を理解する学問です．単純な原理・原則だけで世の中の動きのある物事をきれいに説明できることは，物理・数学の多大な恩恵です．微分方程式により表現し，それを解くことによって，身近な現象をより深く理解するための技術を本書を通じて手に入れましょう．

Chapter 1

動きと微分

本書で学ぶことは

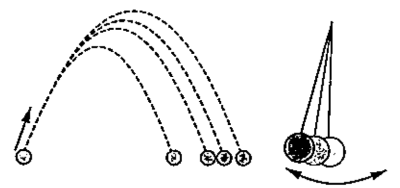
- 定式化：動きのある現象をどのように数学で表すのか
- 解法：定式化したものをどのように解くのか

である．

「動きのある現象」には，図 1.1 のような動きが目に見えるものは当然含まれるが，図 1.2 のような目に見えづらいものも含む．これらをきちんと理解するための学問として「物理」，とくに「力学」がある．さらにいうと，物理とは直接関係のなさそうな「預金と利息」や「ローンと利子」など（図 1.3）も物理と同様の道具で表すことができるが，これについては第 2 章で詳しく述べる．

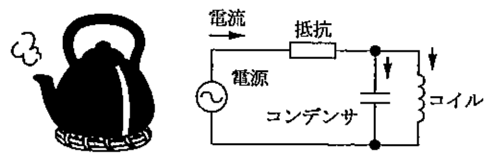
この章では，定式化の第一歩として，まず「動き」を表すために必要な「速度」の考え方を復習し，その延長として微分が発明されたことを確認する．速度が微分で表されるので，速度を含む現象の多くは微分を含む方程式（**微分方程式**（**differential equation**））で表される．

また，微分の逆演算である「積分」についても，その考え方と基本的な計算について復習する．積分が微分の逆演算であるということは，速度から積分を利用して位置を求められることや，微分方程式から微分を消去できうることを示している．したがって，積分の理解は第 3 章で紹介する微分方程式の解法に不可欠である．



物体の投げ上げ　振り子の振動

図 1.1　動きが目に見える現象



お湯が冷める　電気回路

図 1.2　動きが目に見えづらい現象

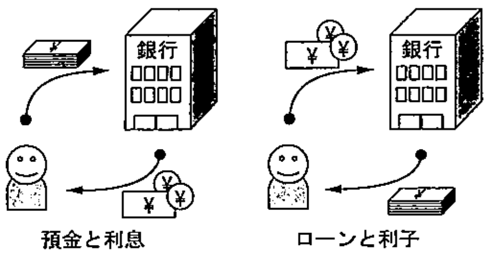


図 1.3 一見物理とは関係なさそうな現象：金融

1.1 速度と微分

本節では，以下の手順で速度を求める式を立て，それが「微分」になることを確認する．

1. ある時間での平均速度を計算する
2. ある時間での平均速度を式で表す
3. ある時刻の瞬間の速度を求める

速度の考え方は，日常素朴に考えているものと変わりはないが，「瞬間」をどのように考えるかという点のみ，若干の工夫が必要である．

1.1.1 速度の計算

徒歩，自転車，自動車，鉄道など，どのような手段で移動するにしても，**速度 (velocity)** は一つの関心事である．速度が速ければ目的地へ早く着くことができる．一般に，徒歩は時速 3 キロメートル前後，自転車は時速 10 キロメートル前後，自動車（街中）は時速 30 キロメートル前後であり，これらを使って目的地までの距離から移動にかかる時間を概算することも多いだろう．

速度は「移動した距離」と「移動にかかった時間」の比で定義される．10 キロメートルを 2 時間かけて移動すれば，速度は次式のようになる．

$$(\text{速度}) = \frac{10\,[\mathrm{km}]}{2\,[\mathrm{h}]} = 5\,[\mathrm{km/h}]$$

例題 1.1 以下のそれぞれの場合について，速度を計算せよ．

(1) 20 [km] を 3 [h] かけて移動したとき．

(2) 1 [mm] を 5 [ms] かけて移動したとき．

(3) 片道 2 [km] を，行きは 0.5 [h]，帰りは 0.7 [h] かけて移動した場合の，行き帰りを合わせた速度．

(4) 片道 4 [km] を，行きは 4 [km/h]，帰りは 6 [km/h] かけて移動した場合の，行き帰りを合わせた速度．

解答 (1) $\dfrac{20\,[\mathrm{km}]}{3\,[\mathrm{h}]} = \dfrac{20}{3}\,[\mathrm{km/h}]$ (2) $\dfrac{1\,[\mathrm{mm}]}{5\,[\mathrm{ms}]} = 0.2\,[\mathrm{m/s}]$

[補足] 設問 (2) は単位が $\dfrac{[\mathrm{mm}]}{[\mathrm{ms}]}$ となるが，いずれも最初の m は 10^{-3} の意味なので，$\dfrac{[\mathrm{mm}]}{[\mathrm{ms}]} = \dfrac{10^{-3}\,[\mathrm{m}]}{10^{-3}\,[\mathrm{s}]} = \dfrac{[\mathrm{m}]}{[\mathrm{s}]} = [\mathrm{m/s}]$ となる．

(3) 移動した距離は往復で 4 [km]，かかった時間が $0.5\,[\mathrm{h}] + 0.7\,[\mathrm{h}] = 1.2\,[\mathrm{h}]$ なので，行き帰りを合わせた速度は $\dfrac{4\,[\mathrm{km}]}{1.2\,[\mathrm{h}]} = \dfrac{10}{3}\,[\mathrm{km/h}]$ となる．

(4) 行きにかかった時間は $\dfrac{4\,[\mathrm{km}]}{4\,[\mathrm{km/h}]} = 1\,[\mathrm{h}]$．帰りにかかった時間は $\dfrac{4\,[\mathrm{km}]}{6\,[\mathrm{km/h}]} = \dfrac{2}{3}\,[\mathrm{h}]$ なので，行き帰りにかかった合計時間は $1\,[\mathrm{h}] + \dfrac{2}{3}\,[\mathrm{h}] = \dfrac{5}{3}\,[\mathrm{h}]$ である．

したがって，行き帰りを合わせた速度は $\dfrac{8\,[\mathrm{km}]}{\frac{5}{3}\,[\mathrm{h}]} = \dfrac{24}{5}\,[\mathrm{km/h}]$ となる．

[補足] 設問 (3)，(4) は平均速度を求める問題だが，$\dfrac{4+6}{2} = 5\,[\mathrm{km/h}]$ ではないことに注意しよう．こうしてよいのはそれぞれの速度で同じ「時間」だけ移動した場合だが，この問題では「距離」が同じであるので利用できない． □

「10 キロメートルを 2 時間かけて移動した」ことを，横軸に時間，縦軸に位置をとったグラフで表すと，図 1.4 となる．

開始時点の時刻を 0 [h]，距離を 0 [km] とすると，開始時点は平面座標 (0 [h], 0 [km])

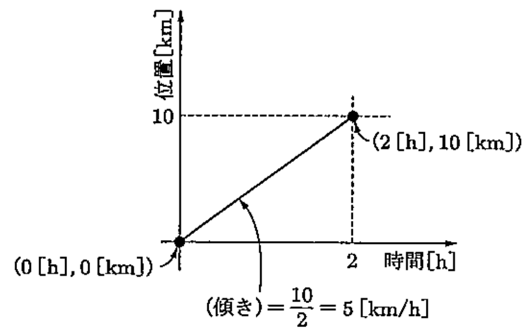


図 1.4 グラフを利用した速度の計算

で表され，2 時間後に目的地に着いたことは $(2\,[\mathrm{h}], 10\,[\mathrm{km}])$ で表される．この 2 点を直線で結ぶと，その直線の傾きは

$$\frac{(\text{縦軸方向の変化量})}{(\text{横軸方向の変化量})} = \frac{10-0\,[\mathrm{km}]}{2-0\,[\mathrm{h}]} = \frac{10\,[\mathrm{km}]}{2\,[\mathrm{h}]} = 5\,[\mathrm{km/h}]$$

となり，速度に対応している．もちろん，横軸に時間をとったので，分母の（横軸方向の変化量）が「移動にかかった時間」，縦軸に距離をとったので，分子（縦軸方向の変化量）が「移動した距離」である．

例題 1.2　例題 1.1 と同じく以下の場合について，横軸を時間，縦軸を位置にとったグラフで示し，速度の求め方を示せ．

(1) 20 [km] を 3 [h] かけて移動したとき．

(2) 1 [mm] を 5 [ms] かけて移動したとき．

(3) 片道 2 [km] を，行きは 0.5 [h]，帰りは 0.7 [h] かけて移動した場合の，行き帰りを合わせた速度．

(4) 片道 4 [km] を，行きは 4 [km/h]，帰りは 6 [km/h] かけて移動した場合の，行き帰りを合わせた速度．

解答　図 1.5 のとおり．

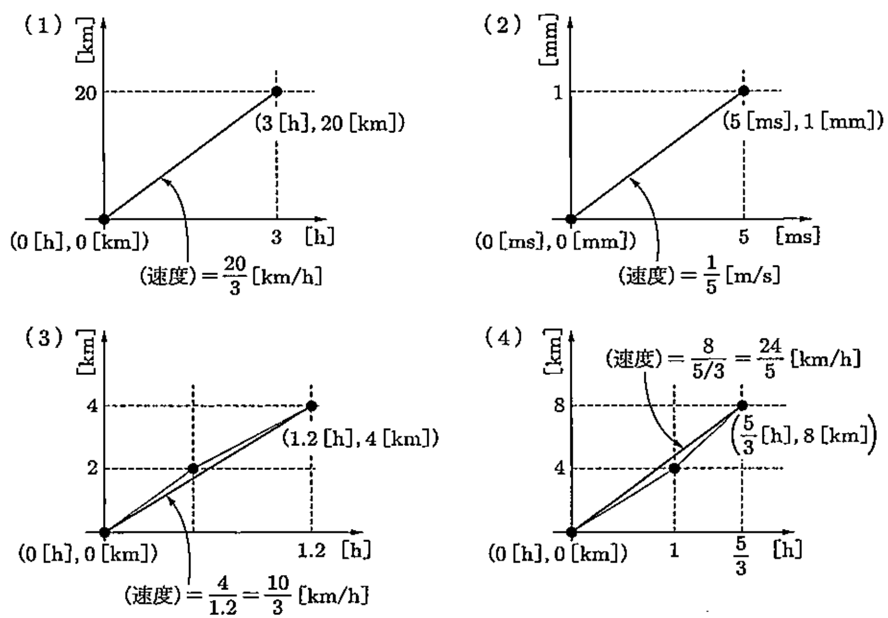


図 1.5　速度の計算　□

横軸に時間，縦軸に位置をとったグラフに対し，2 点間の傾きで速度が求められることがわかった．これは移動の途中で，時間変化を短くとってもよい．次の例題をみてみよう．

例題 1.3　ある物体の移動について，横軸に時刻，縦軸に位置をとったところ，図 1.6 のようになった．このとき，以下に示すそれぞれの時間での速度を求めよ．

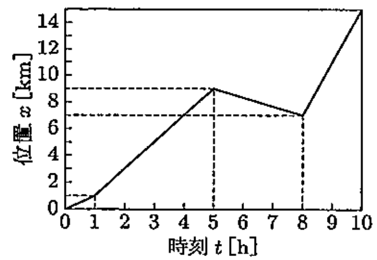


図 1.6　時刻と位置

(1) 最初 (0 [h]) から最後 (10 [h])　(2) 0 [h] から 1 [h]

(3) 1 [h] から 3 [h]　(4) 4 [h] から 8 [h]

解答　(1) $\frac{15-0}{10-0} = 1.5\,[\mathrm{km/h}]$　(2) $\frac{1-0}{1-0} = 1\,[\mathrm{km/h}]$

(3) $\frac{5-1}{3-1} = 2\,[\mathrm{km/h}]$　(4) $\frac{7-7}{8-4} = 0\,[\mathrm{km/h}]$　□

1.1.2　速度を式で表す

速度が $\frac{(\text{移動した距離})}{(\text{かかった時間})}$ で計算されることが確認できたので，これを数式で表すこととしよう．時刻を t とし，時刻 t での位置を $x(t)$ とおく．時刻 t から考えて移動にかかった時間を文字でおくと都合がよいので，これを Δt とする†．すると，最初の時刻を t とすると最後の時刻は $t+\Delta t$ となる．それに対し，それぞれの時刻での位置は $x(t)$，$x(t+\Delta t)$ と表すことができる．

速度は

$$\frac{(\text{移動した距離})}{(\text{かかった時間})} = \frac{(\text{位置の変化量})}{(\text{時刻の変化量})} = \frac{(\text{最後の位置})-(\text{最初の位置})}{(\text{最後の時刻})-(\text{最初の時刻})} \tag{1.1}$$

† Δ は「デルタ」と読むギリシア文字である．英語のアルファベットでは d に対応する．なぜ d を使うのか先取りしたい人は，p.16 を参照．

であるので，速度を v とし[†]，これを数式で置き換えると

$$v = \frac{x(t+\Delta t) - x(t)}{(t+\Delta t) - t} = \frac{x(t+\Delta t) - x(t)}{\Delta t} \tag{1.2}$$

となる．分子の $x(t+\Delta t) - x(t)$ は「x の変化量」を示しているので，Δt と同様の考え方で Δx と書くこともある．この場合は，速度は

$$v = \frac{\Delta x}{\Delta t} \tag{1.3}$$

と表される（図 1.7）．

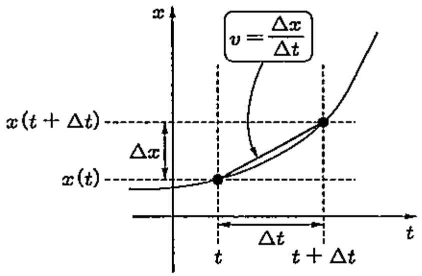


図 1.7 速度の定義 (1)

例題 1.4 時間 t [s] での位置 $x(t)$ が $x(t) = t^2$ [m] である場合，以下に示すそれぞれの時間での速度を求めよ．

(1) 0 [s] から 10 [s]　(2) 0 [s] から 1 [s]　(3) 1 [s] から 3 [s]　(4) 4 [s] から 7 [s]

解答　(2)〜(4) は略解

(1) $\dfrac{x(t+\Delta t) - x(t)}{(t+\Delta t) - t} = \dfrac{x(10) - x(0)}{10 - 0} = \dfrac{10^2 - 0}{10 - 0} = 10$ [m/s]

(2) $\dfrac{1^2 - 0}{1 - 0} = 1$ [m/s]　(3) $\dfrac{3^2 - 1^2}{3 - 1} = 4$ [m/s]　(4) $\dfrac{7^2 - 4^2}{7 - 4} = 11$ [m/s] □

1.1.3 瞬間の速度を求める

さて，速度が $\dfrac{(\text{移動した距離})}{(\text{かかった時間})}$ で定義されることは，移動にかかった時間が長くても（1 [年] など）短くても（1 [ms] など）変わらない．ここで，移動にかかった時間を非常に短くできれば，「ある瞬間での速度」を求めることができると推測できる．

例題 1.4 の問題を使って，「ある瞬間での速度」を求められるかどうか試してみよう．

† 速度を表すのによく v が用いられるが，これは英単語の "velocity" の頭文字である．

ここでは $t = 1$ [s] での瞬間の速度を求めることを目的とし，$t + \Delta t$ を徐々に 1 [s] に近づける計算を示す．

- 1 [s] から 2 [s]

  $\Delta t = 2 - 1 = 1$,

  $\Delta(x) = x(t+\Delta t) - x(t) = x(2) - x(1) = 2^2 - 1 = 3$

  よって，$v = \dfrac{\Delta x}{\Delta t} = \dfrac{3}{1} = 3$

- 1 [s] から 1.5 [s]

  $\Delta t = 1.5 - 1 = 0.5$,

  $\Delta(x) = x(t+\Delta t) - x(t) = x(1.5) - x(1) = 1.5^2 - 1 = 1.25$

  よって，$v = \dfrac{\Delta x}{\Delta t} = \dfrac{1.25}{0.5} = 2.5$

- 1 [s] から 1.1 [s]

  $\Delta t = 1.1 - 1 = 0.1$,

  $\Delta(x) = x(t+\Delta t) - x(t) = x(1.1) - x(1) = 1.1^2 - 1 = 0.21$

  よって，$v = \dfrac{\Delta x}{\Delta t} = \dfrac{0.21}{0.1} = 2.1$

- 1 [s] から 1.01 [s]

  $\Delta t = 1.01 - 1 = 0.01$,

  $\Delta(x) = x(t+\Delta t) - x(t) = x(1.01) - x(1) = 1.01^2 - 1 = 0.0201$

  よって，$v = \dfrac{\Delta x}{\Delta t} = \dfrac{0.0201}{0.01} = 2.01$

- 1 [s] から 1.001 [s]

  $\Delta t = 1.001 - 1 = 0.1 \times 10^{-2}$,

  $\Delta(x) = x(t+\Delta t) - x(t) = x(1.001) - x(1) = 1.001^2 - 1 = 0.2001 \times 10^{-2}$

  よって，$v = \dfrac{\Delta x}{\Delta t} = \dfrac{0.2001 \times 10^{-2}}{0.1 \times 10^{-2}} = 2.001$

この例では，移動にかかった時間 Δt を短くしていくと，$t = 1$ [s] での瞬間の速度は $v = 2$ [m/s] に近づいていくように見える．ここで，移動にかかった時間を Δt のまま

残して速度を計算してみよう．

- $1\,[\mathrm{s}]$ から $1+\Delta t\,[\mathrm{s}]$

$$\Delta t = 1+\Delta t - 1 = \Delta t,$$

$$\Delta(x) = x(t+\Delta t) - x(t) = x(1+\Delta t) - x(1) = (1+\Delta t)^2 - 1 = 2\Delta t + (\Delta t)^2$$

$$\text{よって，}\quad v = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{2\Delta t + (\Delta t)^2}{\Delta t} = 2 + \Delta t$$

「瞬間」ということを「移動にかかった時間が限りなく 0 に近い」と考えると，ここで求めた $2+\Delta t$ は 2 と同じと考えても差し支えなさそうである．したがって，この問題での $t=1\,[\mathrm{s}]$ での「瞬間の」速度は，$v=2\,[\mathrm{m/s}]$ だと結論付けてよいだろう．

$t=1\,[\mathrm{s}]$ での瞬間の速度を求めることができたので，次は任意の時刻での瞬間の速度を求められるかどうかを試してみよう．$t=1$ と代入したところを，t のまま計算してみる．

- $t\,[\mathrm{s}]$ から $t+\Delta t\,[\mathrm{s}]$

$$\Delta t = t+\Delta t - t = \Delta t,$$

$$\Delta(x) = x(t+\Delta t) - x(t) = (t+\Delta t)^2 - t^2 = 2t\Delta t + (\Delta t)^2$$

$$\text{よって，}\quad v = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{2t\Delta t + (\Delta t)^2}{\Delta t} = 2t + \Delta t$$

先ほどと同様に，「瞬間」ということを「移動にかかった時間が限りなく 0 に近い」と考えると，ここで求めた $2t+\Delta t$ は $2t$ と同じと考えても差し支えない．したがって，この問題での $t\,[\mathrm{s}]$ での瞬間の速度は，$v=2t\,[\mathrm{m/s}]$ である．

「限りなく 0 に近い」という表現を使ったが，これをコンパクトに表現するのが，高校で学んだ極限 lim である．これを使って（瞬間の）速度を定義しなおすと，以下のようになる．

$$(\text{速度}) = (\text{時間の変化量を限りなく 0 に近づける})\left\{\frac{(\text{位置の変化量})}{(\text{時間の変化量})}\right\} \tag{1.4}$$

$$\Leftrightarrow\quad v = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta x}{\Delta t} = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{x(t+\Delta t)-x(t)}{\Delta t} \tag{1.5}$$

定義 1.1（速度 (1)） t を時間，$x(t)$ を位置とすると，時刻 t での（瞬間の）速度 $v(t)$ は次式で定義される．

$$v(t) = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta x}{\Delta t} = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{x(t+\Delta t)-x(t)}{\Delta t}$$

例題 1.5 時刻 t での位置 $x(t)$ が以下のように定義されている場合，それぞれの速度を定義 1.1 に基づいて計算せよ．

(1) $x(t)=t^3$ (2) $x(t)=kt^n$ (3) $x(t)=\dfrac{1}{t}$ (4) $x(t)=\dfrac{1}{t+1}$

解答 (1)
$$v(t) = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta x}{\Delta t} = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{x(t+\Delta t)-x(t)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{(t+\Delta t)^3 - t^3}{\Delta t}$$
$$= \lim_{\Delta t\to 0}\frac{t^3+3t^2\Delta t+3t(\Delta t)^2+(\Delta t)^3-t^3}{\Delta t} = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{3t^2\Delta t+3t(\Delta t)^2+(\Delta t)^3}{\Delta t}$$
$$= \lim_{\Delta t\to 0}\{3t^2+3t\Delta t+(\Delta t)^2\} = 3t^2 \quad \text{したがって，}\quad v(t)=3t^2$$

(2)
$$v(t) = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta x}{\Delta t} = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{x(t+\Delta t)-x(t)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{k(t+\Delta t)^n - kt^n}{\Delta t}$$
$$= \lim_{\Delta t\to 0} k\frac{t^n + nt^{n-1}\Delta t + (\Delta t)^2\cdot(t\text{ と }\Delta t\text{ の多項式}) - t^n}{\Delta t}$$

（ここで二項定理を利用した．二項定理については定理 A.2 を参照．）

$$= \lim_{\Delta t\to 0} k\frac{nt^{n-1}\Delta t + (\Delta t)^2\cdot(t\text{ と }\Delta t\text{ の多項式})}{\Delta t}$$
$$= \lim_{\Delta t\to 0} k\{nt^{n-1} + \Delta t\cdot(t\text{ と }\Delta t\text{ の多項式})\}$$
$$= knt^{n-1} \quad \text{したがって，}\quad v(t)=knt^{n-1}$$

(3)
$$v(t) = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta x}{\Delta t} = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{x(t+\Delta t)-x(t)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\frac{1}{t+\Delta t}-\frac{1}{t}}{\Delta t}$$
$$= \lim_{\Delta t\to 0}\frac{t-(t+\Delta t)}{(t+\Delta t)t}\cdot\frac{1}{\Delta t} = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{-\Delta t}{(t+\Delta t)t}\cdot\frac{1}{\Delta t} = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{-1}{(t+\Delta t)t} = -\frac{1}{t^2}$$

したがって，$v(t) = -\dfrac{1}{t^2}$

(4)
$$v(t) = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta x}{\Delta t} = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{x(t+\Delta t)-x(t)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\frac{1}{t+\Delta t+1}-\frac{1}{t+1}}{\Delta t}$$
$$= \lim_{\Delta t\to 0}\frac{t+1-(t+\Delta t+1)}{(t+\Delta t+1)(t+1)}\cdot\frac{1}{\Delta t} = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{-\Delta t}{(t+\Delta t+1)(t+1)}\cdot\frac{1}{\Delta t}$$
$$= \lim_{\Delta t\to 0}\frac{-1}{(t+\Delta t+1)(t+1)} = -\frac{1}{(t+1)^2} \quad \text{したがって，}\quad v(t) = -\frac{1}{(t+1)^2}$$

□

1.1.4　微分の定義

以上のように「瞬間の速度」を求める方法がわかった．定義 1.1 の位置 $x(t)$ から速度 $v(t)$ を求める演算は，位置以外の関数 $f(t)$ に対しても適用できる．その演算を微分 (**differential**) と定義する．

定義 1.2（微分）　t の関数 $f(t)$ の微分を次式で定義し，$\frac{df}{dt}$ と書く．

$$\frac{df}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0}\frac{\Delta f}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0}\frac{f(t+\Delta t) - f(t)}{\Delta t}$$

とくに，関数 f を時間 t で微分したものは $\dot{f}$，f が（時間以外の）どの変数に対する関数であるかが明確な場合は f' と書くこともある．

df，dt についている d は英単語の "difference"（差）の頭文字であり，df は「f の微小な変化量」の意味である．ここでの「微小な」は，$\lim_{\Delta t \to 0}$ のように 0 への極限をとった後，という意味である．言い換えると，0 に十分近づけたが 0 ではないような変化量を示している．したがって，$\frac{df}{dt}$ という記法には $\frac{(f\text{ の微小な変化量})}{(t\text{ の微小な変化量})}$ という意味があり，速度の求め方と同じであることがわかる．この記法は微分の意味をもっともよく表しているものであるが，略記する場合は $f'(t)$，物理学ではとくに $\dot{f}(t)$ の記法がよく用いられる†．

本書では，物理の現象を表す式については，適宜 $\dot{f}(t)$ の記法を用いる．また，f' の記法を用いる際，どの変数による微分なのかは f の定義に基づく．$f(t)$ であれば $f' = \frac{df}{dt}$ であり，$f(x)$ であれば $f' = \frac{df}{dx}$ である．

定義 1.3（速度(2)）　t を時間，$x(t)$ を位置とすると，時刻 t での（瞬間の）速度 $v(t)$ は次式で定義される．

$$v(t) = \frac{dx}{dt} = \dot{x}(t)$$

† 微分法の発明はニュートン (Newton, Issac) とライプニッツ (Leibnitz, Gottfried Wilhelm) の二人の功績が大きいといわれている．そのうち，$\frac{df}{dt}$ の記法はライプニッツが，$\dot{f}$ の記法はニュートンが発明している．微分が元々は比であることや，形式的に分数と見なして計算する際の簡便さなどから，ライプニッツの記法は非常に優秀である．しかし，ニュートンが使用した $\dot{f}$ の記法も，表記の簡便さも手伝い，現在でも物理学を中心によく利用されている．

彼らは独立に微分法を発明しているが，二人の間ではどちらが先に発明しているのかについて論争が生じている．この辺りの事情は文献 [2]～[4] などで読むことができる．

図 1.8 は微分の定義を図示したものである．時刻 t から $t+\Delta t$ までの平均速度は，グラフ上ではその 2 点を通る直線の傾きとなる．微分は $\Delta t \to 0$ とした極限であるので，2 点が限りなく近づき 1 点となる．このとき，直線は元の関数 $x(t)$ に接することになり，「関数 $x(t)$ に対する t での接線」とよばれる．したがって，関数をグラフとして図示した場合，その微分を求めることは，接線の傾きを求めることと等しいことがわかる．

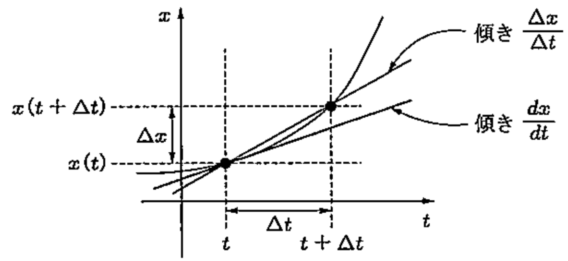


図 1.8　微分（瞬間の速度）の定義

例題 1.6　以下の $f(t)$ に対する $\frac{df}{dt}$ を定義 1.2 に基づいて計算せよ．

(1) $f(t) = t^3$　(2) $f(t) = at^n$　(3) $f(t) = \frac{1}{t}$　(4) $f(t) = \frac{1}{t+1}$

解答（略解）　いずれの問題も，例題 1.5 とほとんど同じである．解答のみ示す．

(1) $3t^2$　(2) ant^{n-1}　(3) $-\frac{1}{t^2}$　(4) $-\frac{1}{(t+1)^2}$　□

例題 1.7　ある物体の移動について，横軸に時刻，縦軸に位置をとったところ図 1.9 であった．このとき，横軸に時刻，縦軸に速度をとったグラフを描け．

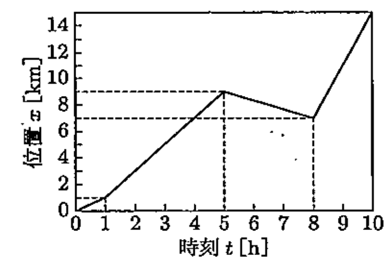


図 1.9　時刻と位置

解答　図 1.10 となる．

［解説］　位置は $t=1$，5，8 で折れる折れ線で表されている．それらの間は一次関数で

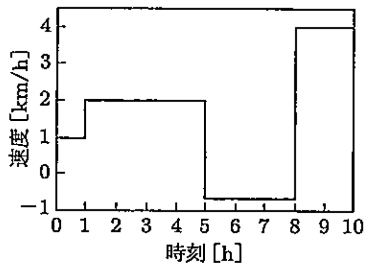


図 1.10 時刻と速度

表されているので，傾きを読み取りグラフに描けばよい．たとえば，$t=1$ から 5 では $\dfrac{x(5)-x(1)}{5-1}=\dfrac{9-1}{4-1}=2$ [km/h] である．

異なる傾きの直線がつながれている部分では，速度が不連続 (discontinuous)† となる．□

1.1.5 変化率と微分

位置 $x(t)$ を時間 t で微分すると速度が得られることを確認した．では，他の変数（物理量）ではどうなるだろうか？

微分 $\dfrac{df}{dt}$ が微小な変化量 df と dt の比であることを言い換えると，微分 $\dfrac{df}{dt}$ は t が変化したときに f がどれだけ変化するかの「変化率」を表していることになる．したがって，他の変数（物理量）の微分でも「変化率」を表すことになる．

例 1.1
- x が位置，t が時間の場合の $\dfrac{dx}{dt}$：この微分は「時間が少し変化したときの，位置の変化量の割合（変化率）」を示している．したがって，この微分は「速度」を表している．
- p が圧力，h が水深の場合の $\dfrac{dp}{dh}$：この微分は「水深が変化したときの圧力の変化率」を表している．
- T が温度，H が標高の場合の $\dfrac{dT}{dH}$：この微分は「標高が変化したときの温度の変化率」を表している．
- f が放射性元素の密度，t が時間の場合の $\dfrac{df}{dt}$：この微分は「放射性元素の密度の時間に対する変化率」を示している．

このように，さまざまな変数（物理量）の変化率を微分を用いて表すことができる．

† 文字どおり「連続でない」こと．形式的な説明は定義 A.3 参照．

1.1.6 加速度と高階微分

速度 $v(t)$ も時間とともに変化する量であるので，位置と同様にして $\dfrac{(\text{速度の変化量})}{(\text{かかった時間})}$ を計算することができる．この値は考えている時間の区間で，速度がどれくらいの割合で変化しているかを示している．この値は物理学では加速度 (acceleration) とよばれる†．

$$(\text{加速度})=\frac{(\text{速度の変化量})}{(\text{かかった時間})} \tag{1.6}$$

$$\Leftrightarrow \quad a=\frac{\Delta v}{\Delta t}=\frac{v(t+\Delta t)-v(t)}{\Delta t} \tag{1.7}$$

例題 1.8 ある物体の移動について，横軸に時刻，縦軸に速度をとったところ，図 1.11 のようになった．

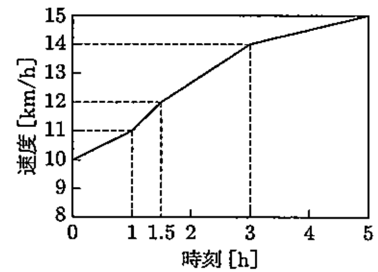


図 1.11 時刻と速度

このとき，以下に示すそれぞれの時間での加速度を求めよ．

(1) 1 [h] から 5 [h]　(2) 1 [h] から 3 [h]　(3) 1 [h] から 1.5 [h]

解答（略解）

(1) $\dfrac{15-11}{5-1}=1$ [km/h^2]　(2) $\dfrac{14-11}{3-1}=1.5$ [km/h^2]　(3) $\dfrac{12-11}{1.5-1}=2$ [km/h^2] □

例題 1.9 ある物体の移動について，時間 t [s] での速度 $v(t)$ が $v(t)=t^2$ [m/s] である場合を考える．このとき，以下に示すそれぞれの時間での加速度を求めよ．

(1) 0 [s] から 10 [s]　(2) 0 [s] から 1 [s]　(3) 1 [s] から 3 [s]
(4) 4 [s] から 7 [s]　(5) 1 [s] から 1.1 [s]　(6) 1 [s] から 1.001 [s]

† 加速度は英語で "acceleration" であり，頭文字の a で示すことが多い．

解答（(2)〜(6) は略解）

(1) $a=\dfrac{\Delta v}{\Delta t}=\dfrac{v(t+\Delta t)-v(t)}{\Delta t}=\dfrac{10^2-0}{10-0}=10\,[\mathrm{m/s^2}]$　　(2) $a=\dfrac{1^2-0}{1-0}=1\,[\mathrm{m/s^2}]$

(3) $a=\dfrac{3^2-1^2}{3-1}=4\,[\mathrm{m/s^2}]$　　(4) $a=\dfrac{7^2-4^2}{7-4}=11\,[\mathrm{m/s^2}]$

(5) $a=\dfrac{1.1^2-1^2}{1.1-1}=2.1\,[\mathrm{m/s^2}]$　　(6) $a=\dfrac{1.001^2-1}{1.001-1}=2.001\,[\mathrm{m/s^2}]$　□

これらの例題からもわかるように，速度 v から加速度 a を求める計算は，位置 x から速度 v を求める計算，つまり微分と同じである．したがって，加速度は以下のように微分を用いて定義できる．

定義 1.4（加速度 (1)）　t を時間，$v(t)$ を速度とすると，時刻 t での（瞬間の）加速度 $a(t)$ は次式で定義される．

$$a(t)=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta v}{\Delta t}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{v(t+\Delta t)-v(t)}{\Delta t}=\frac{dv}{dt}$$

例題 1.10　速度 $v(t)$ が以下のように定義されている場合，それぞれの加速度を定義 1.4 に基づいて計算せよ．

(1) $v(t)=t^3$　　(2) $v(t)=kt^n$　　(3) $v(t)=\dfrac{1}{t+1}$

解答（略解）　(1) $3t^2$　　(2) knt^{n-1}　　(3) $-\dfrac{1}{(t+1)^2}$　□

ここまでで，

- 速度 v は位置 x を時間 t で微分して計算される．つまり $v=\dfrac{dx}{dt}$ となる．
- 加速度 a は速度 v を時間 t で微分して計算される．つまり $a=\dfrac{dv}{dt}$ となる．

がわかったので，位置から速度，速度から加速度を計算する例題を見てみよう．

例題 1.11　時間 t での位置 $x(t)$ が以下のように定義されている場合，それぞれの速度 $v(t)$ および加速度 $a(t)$ を定義 1.1 および定義 1.4 に基づいて計算せよ．

(1) $x(t)=t^3$　　(2) $x(t)=kt^n\ (n=2,3,\ldots)$

(3) $x(t)=\dfrac{1}{t}$　　(4) $x(t)=\dfrac{1}{t+1}$

解答　(1)

$$\begin{aligned}v(t)&=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta x}{\Delta t}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{x(t+\Delta t)-x(t)}{\Delta t}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{(t+\Delta t)^3-t^3}{\Delta t}\\&=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{t^3+3t^2\Delta t+3t(\Delta t)^2+(\Delta t)^3-t^3}{\Delta t}\\&=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{3t^2\Delta t+3t(\Delta t)^2+(\Delta t)^3}{\Delta t}\\&=\lim_{\Delta t\to 0}(3t^2+3t\Delta t+(\Delta t)^2)=3t^2\quad\text{したがって，}\quad v(t)=3t^2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}a(t)&=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta v}{\Delta t}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{v(t+\Delta t)-v(t)}{\Delta t}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{3(t+\Delta t)^2-3t^2}{\Delta t}\\&=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{3t^2+6t\Delta t+3(\Delta t)^2-3t^2}{\Delta t}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{6t\Delta t+3(\Delta t)^2}{\Delta t}\\&=\lim_{\Delta t\to 0}(6t+3\Delta t)=6t\quad\text{したがって，}\quad a(t)=6t\end{aligned}$$

(2)

$$\begin{aligned}v(t)&=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta x}{\Delta t}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{x(t+\Delta t)-x(t)}{\Delta t}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{k(t+\Delta t)^n-kt^n}{\Delta t}\\&=\lim_{\Delta t\to 0}k\frac{t^n+nt^{n-1}\Delta t+(\Delta t)^2\cdot(t\text{ と }\Delta t\text{ の多項式})-t^n}{\Delta t}\\&=\lim_{\Delta t\to 0}k\frac{nt^{n-1}\Delta t+(\Delta t)^2\cdot(t\text{ と }\Delta t\text{ の多項式})}{\Delta t}\\&=\lim_{\Delta t\to 0}k\{nt^{n-1}+\Delta t\cdot(t\text{ と }\Delta t\text{ の多項式})\}\\&=knt^{n-1}\quad\text{したがって，}\quad v(t)=knt^{n-1}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}a(t)&=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta v}{\Delta t}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{v(t+\Delta t)-v(t)}{\Delta t}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{kn(t+\Delta t)^{n-1}-knt^{n-1}}{\Delta t}\\&=\lim_{\Delta t\to 0}kn\frac{t^{n-1}+(n-1)t^{n-2}\Delta t+\Delta t^2(t\text{ と }\Delta t\text{ の多項式})-t^{n-1}}{\Delta t}\\&=\lim_{\Delta t\to 0}kn\frac{(n-1)t^{n-2}\Delta t+\Delta t^2(t\text{ と }\Delta t\text{ の多項式})}{\Delta t}\\&=\lim_{\Delta t\to 0}kn\{(n-1)t^{n-2}+\Delta t(t\text{ と }\Delta t\text{ の多項式})\}=kn(n-1)t^{n-2}\end{aligned}$$

したがって，　$a(t)=kn(n-1)t^{n-2}$

(3) $$v(t)=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta x}{\Delta t}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{x(t+\Delta t)-x(t)}{\Delta t}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\frac{1}{t+\Delta t}-\frac{1}{t}}{\Delta t}$$

$$=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{t-(t+\Delta t)}{(t+\Delta t)t}\cdot\frac{1}{\Delta t}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{-\Delta t}{(t+\Delta t)t}\cdot\frac{1}{\Delta t}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{-1}{(t+\Delta t)t}=-\frac{1}{t^2}$$

したがって， $v(t)=-\frac{1}{t^2}$

$$a(t)=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta v}{\Delta t}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{v(t+\Delta t)-v(t)}{\Delta t}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{-\frac{1}{(t+\Delta t)^2}+\frac{1}{t^2}}{\Delta t}$$

$$=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{-t^2+(t+\Delta t)^2}{(t+\Delta t)^2t^2}\cdot\frac{1}{\Delta t}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{-t^2+t^2+2t\Delta t+(\Delta t)^2}{(t+\Delta t)^2t^2}\cdot\frac{1}{\Delta t}$$

$$=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{2t+\Delta t}{(t+\Delta t)^2t^2}=\frac{2t}{t^4}=\frac{2}{t^3}$$ したがって， $a(t)=\frac{2}{t^3}$

(4) $$v(t)=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta x}{\Delta t}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{x(t+\Delta t)-x(t)}{\Delta t}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\frac{1}{t+\Delta t+1}-\frac{1}{t+1}}{\Delta t}$$

$$=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{t+1-(t+\Delta t+1)}{(t+\Delta t+1)(t+1)}\cdot\frac{1}{\Delta t}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{-\Delta t}{(t+\Delta t+1)(t+1)}\cdot\frac{1}{\Delta t}$$

$$=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{-1}{(t+\Delta t+1)(t+1)}=-\frac{1}{(t+1)^2}$$ したがって， $v(t)=-\frac{1}{(t+1)^2}$

$$a(t)=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta v}{\Delta t}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{v(t+\Delta t)-v(t)}{\Delta t}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{-\frac{1}{(t+\Delta t+1)^2}+\frac{1}{(t+1)^2}}{\Delta t}$$

$$=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{-(t+1)^2+(t+\Delta t+1)^2}{(t+\Delta t+1)^2(t+1)^2}\cdot\frac{1}{\Delta t}$$

$$=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{-(t+1)^2+(t+1)^2+2(t+1)\Delta t+(\Delta t)^2}{(t+\Delta t+1)^2(t+1)^2}\cdot\frac{1}{\Delta t}$$

$$=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{2(t+1)+\Delta t}{(t+1+\Delta t)^2(t+1)^2}=\frac{2(t+1)}{(t+1)^4}=\frac{2}{(t+1)^3}$$

したがって， $a(t)=\frac{2}{(t+1)^3}$ □

この例題からもわかるように，位置 $x(t)$ に対して 2 回微分を施すと $a(t)$ が得られることがわかった．このように，一つの関数に 2 回微分を施すことも可能であり，これを**二階微分** (**second order differential**) とよぶ（「二回微分」ではないことに注意！）．

これに対して，1 回だけ微分を施したものは（当然）**一階微分** (**first order differential**) である．

二階微分を表す記号を導入しよう．まず，微分の記号として定義した $\frac{dx}{dt}$ を（形式的に）$\frac{d}{dt}\cdot x$ とし，左側の $\frac{d}{dt}$ を「右側の関数を t で微分する記号」と見なす．これを**微分演算子**（**または微分作用素**）(**differential operator**) とよぶ．

すると，位置 $x(t)$，速度 $v(t)$ および加速度 $a(t)$ は

$$v(t)=\frac{d}{dt}x(t),\quad a(t)=\frac{d}{dt}v(t) \tag{1.8}$$

となる．左式を右式に代入すると

$$a(t)=\frac{d}{dt}\cdot\frac{d}{dt}x(t) \tag{1.9}$$

となるが，ここで

$$\frac{d}{dt}\cdot\frac{d}{dt}\equiv\frac{d^2}{dt^2} \tag{1.10}$$

として，これを二階微分の記号とする．

定義 1.5（二階微分） t の関数 $f(t)$ の二階微分を次式で表す．

$$\frac{d^2f}{dt^2}$$

とくに，関数 f を時間 t で二階微分したものは $\ddot{f}$，f が（時間以外の）どの変数に対する関数であるかが明確な場合は f'' と書くこともある．

定義 1.6（加速度(2)） t を時間，$x(t)$ を位置とすると，時刻 t での（瞬間の）加速度 $a(t)$ は次式で定義される．

$$a(t)=\frac{d^2x}{dt^2}=\ddot{x}(t)$$

例題 1.12 $x(t)$ が以下のように定義されている場合，加速度 $a(t)$ を定義 1.6 に基づいて計算せよ．

(1) $x(t)=t^4$　(2) $x(t)=kt^n$　(3) $x(t)=\frac{1}{t}$　(4) $x(t)=\frac{1}{2t+a}$

解答（略解）

(1) $\dfrac{dx}{dt} = 4t^3,\quad a(t) = \dfrac{d^2x}{dt^2} = 12t^2$

(2) $\dfrac{dx}{dt} = knt^{n-1},\quad a(t) = \dfrac{d^2x}{dt^2} = kn(n-1)t^{n-2}$

(3) $\dfrac{dx}{dt} = -\dfrac{1}{t^2},\quad a(t) = \dfrac{d^2x}{dt^2} = \dfrac{2}{t^3}$

(4) $\dfrac{dx}{dt} = -\dfrac{2}{(2t+a)^2},\quad a(t) = \dfrac{d^2x}{dt^2} = \dfrac{8}{(2t+a)^3}$ □

三階以上でも，一般の n 階の微分でも，同様に表すこととする．

定義 1.7（n 階微分） t の関数 $f(t)$ の n 階微分を次式で表す．

$$\frac{d^n f}{dt^n}$$

f がどの変数に対する関数であるかが明確な場合は $f^{(n)}$ と書くこともある．

階数が大きい微分を**高階微分 (high order differential)** とよぶこともある．二階，三階，…の微分をまとめて「二階以上の高階微分」のように使用する．

1.2 さまざまな関数の微分

微分のおもな性質，よく使う関数の微分を，表 1.1 および表 1.2 にまとめる．ここで，a は定数である．いずれも微分の定義から導出できるが，計算をすばやくするためには覚えておくとよい．これらの導出の説明は A.2 節にまとめてあるので，必要な場合は参照のこと．

表 1.1 微分の性質

定数倍	$\dfrac{d}{dx}\{af(x)\} = a\dfrac{df(x)}{dx}$
和・差	$\dfrac{d}{dx}\{f(x) \pm g(x)\} = \dfrac{df(x)}{dx} \pm \dfrac{dg(x)}{dx}$ （複号同順）
積	$\dfrac{d}{dx}\{f(x)g(x)\} = \left(\dfrac{df}{dx}\right)g + f\left(\dfrac{dg}{dx}\right)$
商	$\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{f(x)}{g(x)}\right) = \dfrac{1}{g^2}\cdot\left\{\left(\dfrac{df}{dg}\right)g - f\left(\dfrac{dg}{dx}\right)\right\}$
合成関数	$\dfrac{d}{dx}\{f(g(x))\} = \dfrac{df}{dg}\cdot\dfrac{dg}{dx}$

表 1.2 基本的な関数の微分

x^a	$\dfrac{d}{dx}x^a = ax^{a-1}$
三角関数	$\dfrac{d}{dx}\sin x = \cos x,\quad \dfrac{d}{dx}\cos x = -\sin x$
対数関数	$\dfrac{d}{dx}\ln x = \dfrac{1}{x}$
指数関数	$\dfrac{d}{dx}e^x = e^x,\quad \dfrac{d}{dx}e^{ax} = ae^{ax}$

正弦波と微分　三角関数のうち，とくに $\sin t$, $\cos t$（t は時間）は**正弦波 (sinusoidal wave)** とよばれ†，ばね，振り子から音波に至るまで，振動のもっとも基本的な波形として頻繁に現れる．ばねや振り子のように，物体の位置が正弦波で表される場合，これを微分することは速度を求めることになる．ここでは，正弦波を微分するとどのようになるかを確認しておこう．

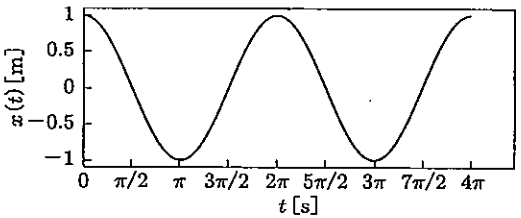


図 1.12 $x(t) = \cos t$ のグラフ

図 1.12 は $x(t) = \cos t$ のグラフである．表 1.2 より，$\dfrac{d}{dt}\cos t = -\sin t$ となる．このこととグラフとを関連付けて理解しよう．

$x(t) = \cos t$ が物体の位置であるとすると，その微分 $\dfrac{dx}{dt}$ は速度 $v(t)$ である．$x(t)$ のグラフから，いくつかの特別な時刻についてはそこでの速度が予測できる．

- $t = 0,\ 2\pi, \ldots$
  これらの時刻での $x(t)$ を確認すると，$x(t) = 1$ であり，その直前と直後で止まっている（位置が変化していない）．「止まっている」ことはすなわち「速度が 0 である」ことにほかならない．

† $\cos t = \sin\left(x + \dfrac{\pi}{2}\right)$ が成り立つので，$\cos t$ も正弦波に含まれる．

$t=\pi, 3\pi, \dots$ では，$x(t)=-1$ で同じことが起こっている．

- $t=\pi/2, 5\pi/2, \dots$

  これらの時刻の前後では位置の変化が大きく，正から負の方向である．

  「位置が負の方向に大きく動いている」ということは，「速度が負で絶対値が大きい」ことにほかならない．

  また，$t=3\pi/2, 7\pi/2, \dots$ では，符号が異なるが同じことが起こっている．

この予測と，微分して求めた $v(t)=-\sin t$ を比較してみよう（図 1.13）．

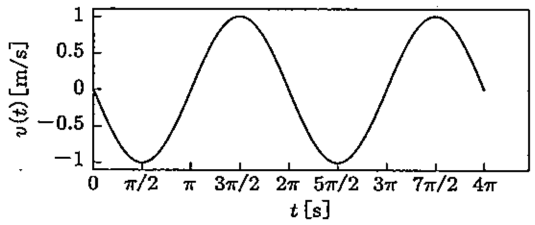


図 1.13　$v(t)=-\sin t$ のグラフ

- $t=0, 2\pi, \dots$

  これらの時刻での $v(t)$ を確認すると，確かに $v(t)=0$ となっている．

  $t=\pi, 3\pi, \dots$ でも同じく $v(t)=0$ である．

- $t=\pi/2, 5\pi/2, \dots$

  これらの時刻では $v(t)=-1$ であり，これらは負でもっとも絶対値が大きな速度となっている．

  また，$t=3\pi/2, 7\pi/2, \dots$ では $v(t)=1$ であり，こちらは正でもっとも速度が大きい．

このように，位置のグラフから予測した速度の様子と微分で求めた速度は，（当然）特徴が一致している．

次に，さまざまな周波数の正弦波を微分したときの様子を確認してみよう．

周波数の単位としてヘルツ (Herz, Hz) がよく知られている．ヘルツは「1 秒あたりの振動数」で定義される．「1 [Hz] の正弦波」は「1 秒間で sin の中身が 2π 増える」と考えればよいので，$\sin 2\pi t$ と表される．一般化すると，「f [Hz] の正弦波」は「1 秒間で sin の中身が $2\pi f$ 増える」と考えればよいので，$\sin 2\pi ft$ と表される．

$x(t)=\sin 2\pi ft$ の正弦波を微分すると，$\dot{x}(t)=2\pi f\cos 2\pi ft$ となる．つまり，微分することにより振幅が $2\pi f$ 倍になっている．$f=0.1$ [Hz] と 1 [Hz] に対して，正弦波とその微分を図 1.14 に示す．いずれも上に $x(t)$，下に $\dot{x}(t)$ を示している．

0.1 [Hz]（図 1.14(a)）では微分により振幅が小さくなっていることがわかるが，それに対して 1 [Hz]（図 (b)）では振幅が大きくなっていることがわかる（縦軸の範囲に注意）．横軸方向に注目すると，どちらのグラフでも周期は変わっていない．これは $\dot{x}(t)=2\pi f\cos 2\pi ft$ のように，sin の中身が $2\pi ft$ で変化していないことと対応している．

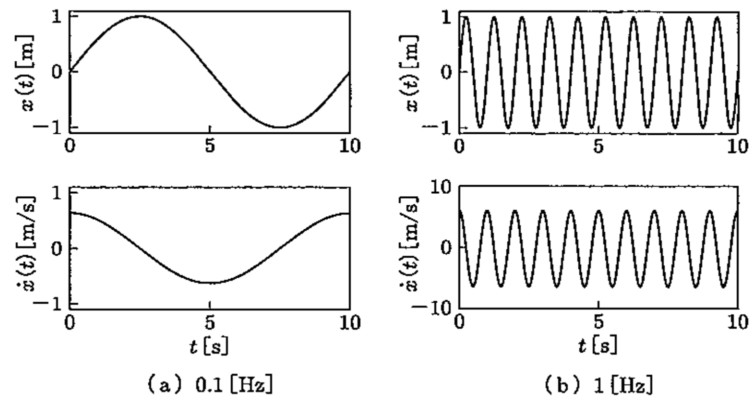


図 1.14　周波数と微分

1.3 速度と積分

位置を時間で微分することで速度が求められることがわかった．さらに，速度は横軸に時間，縦軸に位置をとったグラフの接線の傾きとなることも確認した．それでは，速度（のグラフ）から位置を求めることはできるのだろうか？

速度の定義は，

$$(\text{速度})=\frac{(\text{位置の変化量})}{(\text{時間の変化量})} \quad \Leftrightarrow \quad (\text{位置の変化量})=(\text{速度})\cdot(\text{時間の変化量}) \qquad (1.11)$$

と変形できるので，速度が一定の場合は，この式で簡単に位置の変化量を求めることができる．たとえば，60 [km/h] で 2 [h] 移動した場合，位置の変化量（移動距離）は 60 [km/h] × 2 [h] = 120 [km] である．横軸に時間，縦軸に速度をとったグラフ (図 1.15) では，速度のグラフと横軸，時刻 0 [h] と 2 [h] で囲まれる長方形の面積を求めていることがわかる．

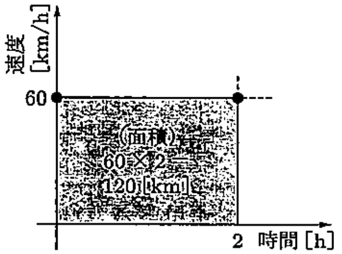


図 1.15 速度から位置の変化量を求める (1)

例 1.2 速度が途中で変わっても，同様に面積で位置の変化量を求めることができる．図 1.16 に示すように速度が変化したとすると，位置の変化量は $60 \times 0.5 + 40 \times (2 - 0.5) = 90$ [km] である．

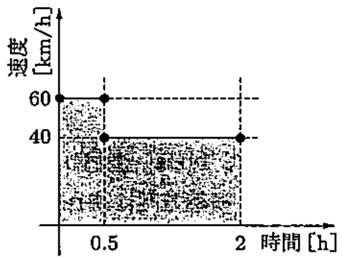


図 1.16 速度から位置の変化量を求める (2)

ここで示した，速度から位置の変化量を求める演算（図的には，グラフでできあがる図形の面積を求める演算）を一般化したものが積分 (integral) であり，微分の逆演算であることを示すことができる．第 3 章でみるように，微分方程式を解くことは，微分方程式に含まれている微分を積分を使って取り除くことでもある．このように，積分は微分方程式を解くのには欠かせない．

積分を説明する順序としては，

1. 不定積分を微分の逆演算として定義する
2. 不定積分から定積分を定義する
3. 定積分を面積と結びつける

という流儀も一般的である[†]が，この本では（定）積分の記号

$$\int_a^b f(x)dx \tag{1.12}$$

がもつ意味を理解しやすい，逆向きの順序で説明する．この節を読めば，「$\int$ はどんな意味をもっているのか？」「dx はなぜ必要なのか？」「微分は ′ を付けるだけで簡単なのに，積分はなぜ前と後ろから $\int$ と dx を付けなくてはいけないのか？」という疑問のすべてに答えられるようになる．

† 高校の教科書はこの流儀であることが多いようである．

1.3.1 面積と定積分

位置や速度からちょっと離れて，グラフで作られる図形の面積を求める問題に集中しよう．具体的には，$a \le x \le b$ で，x 軸と関数 $f(x)$ の作る面積（図 1.17 ①）を求めることとしよう．簡単のため，$f(x) \ge 0$ とする．

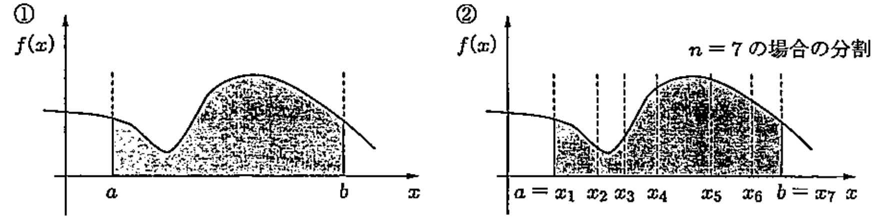


図 1.17 面積を求める①〜②

面積を求めるために，$a \le x \le b$ の範囲を細かく分け，それぞれの点を $x_1, x_2, \ldots, x_n$ とする．このとき，$a = x_1 < x_2 < \cdots < x_n = b$ とする．$n = 7$ としたときの分割の例を図 1.17 ② に示す．

ここでのアイデアは，いきなり面積をずばり求めるのではなく，「色のついたところよりも面積が小さい長方形」と「色のついたところよりも面積が大きい長方形」を作ることで，その間に求めたい面積がある，というものである．

- 色のついたところよりも面積が小さい長方形の作り方
  $x_1 \le x \le x_2$ での $f(x)$ の最小値を m_1，$x_2 \le x \le x_3$ での $f(x)$ の最小値を m_2，… とし，図 1.18 ③ のように長方形を作る．各長方形の底辺は $x_{i+1} - x_i$，高さは m_i で，これら長方形の面積の和

$$s = m_1(x_2 - x_1) + m_2(x_3 - x_2) + \cdots + m_{n-1}(x_n - x_{n-1}) = \sum_{i=1}^{n-1} m_i(x_{i+1} - x_i)$$

  は，求めたい面積よりも必ず小さい．
- 色のついたところよりも面積が大きい長方形の作り方
  $x_1 \le x \le x_2$ での $f(x)$ の最大値を M_1，$x_2 \le x \le x_3$ での $f(x)$ の最大値を M_2，… とし，図 1.18 ④ のように長方形を作る．各長方形の底辺は $x_{i+1} - x_i$，高さは M_i で，これらの和

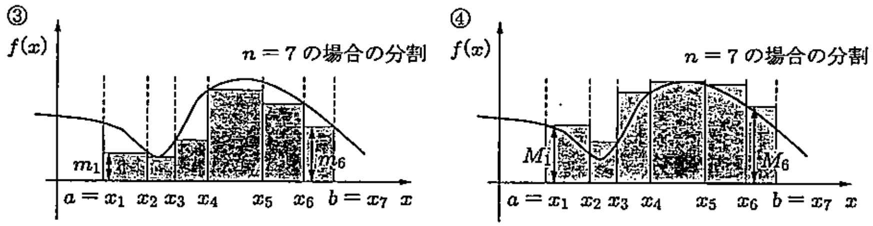


図 1.18 面積を求める③〜④

$$S = M_1(x_2 - x_1) + M_2(x_3 - x_2) + \cdots + M_{n-1}(x_n - x_{n-1}) = \sum_{i=1}^{n-1} M_i(x_{i+1} - x_i)$$

は，求めたい面積よりも必ず大きい．

したがって，求めたい面積を A とおくと，以下の関係が成り立つ．

$$s = \sum_{i=1}^{n-1} m_i(x_{i+1} - x_i) \leq A \leq \sum_{i=1}^{n-1} M_i(x_{i+1} - x_i) = S \tag{1.13}$$

求めたい面積 A を正確に知るためには，式 (1.13) の両辺の値の差を近づければよい．両辺の差を図示すると図 1.19⑤になり，式で表すと

$$S - s = \sum_{i=1}^{n-1} (M_i - m_i)(x_{i+1} - x_i)$$

となる．この値（面積）を 0 に近づけるためには，非常に直感的ではあるが，x 軸の分割を細かくして，最大値 M_i と最小値 m_i の差を小さくすればよい．例として分割を細かくしたものを図 1.19⑥に示す．確かに，$S - s$ が小さくなっていることがわかる．

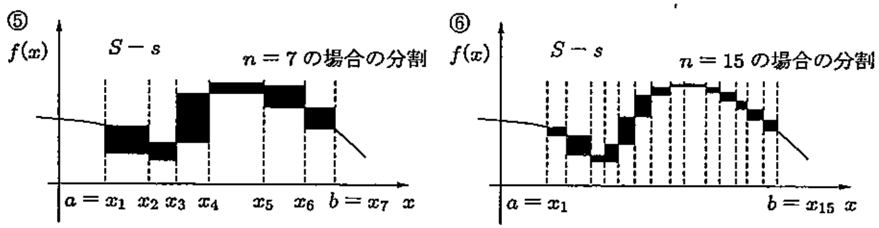


図 1.19 面積を求める⑤〜⑥

このようにして分割を細かくしていくと，$S - s$ は 0 に近づく．このことは，分割を細かく行ったときの S，s が同じ値になり，それが求めたい面積 A に等しくなることを示している．

さて，これで求めたい面積 A に関する議論が終わった……わけではない．これら値 S および s を関数 f と結びつける方法が必要である．

m_i，M_i の定義により，$m_i \leq f(x_i) \leq M_i$ であることが明らかなので，

$$\sum_{i=1}^{n-1} m_i(x_{i+1} - x_i) \leq \sum_{i=1}^{n-1} f(x_i)(x_{i+1} - x_i) \leq \sum_{i=1}^{n-1} M_i(x_{i+1} - x_i) \tag{1.14}$$

がいつでも成り立つ．この式の真ん中に現れる $\sum_{i=1}^{n-1} f(x_i)(x_{i+1} - x_i)$ を図 1.20 に示す（この面積が s より大きく S より小さくなることを確認してみよう）．

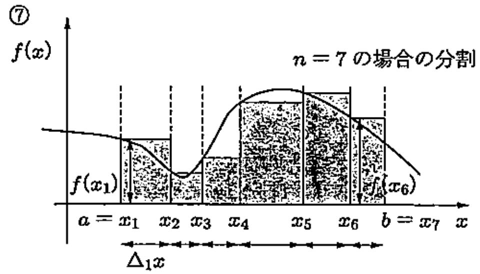


図 1.20 面積を求める⑦

分割した長方形の底辺 $x_{i+1} - x_i$ は x の変化量とも考えられるので，これを $\Delta_i x$ と書きなおそう（微分のときと同じアイデアである）．すると，

$$s \leq \sum_{i=1}^{n-1} f(x_i)\Delta_i x \leq S \tag{1.15}$$

が成り立つ．先ほど，「分割を非常に細かくすると S と s は求めたい面積に等しくなる」とわかった．「分割を非常に細かくする」を，「$\Delta_i x$ を 0 に近づける」と読み替えると，

$$s = \lim_{\Delta_i x \to 0} \sum_{i=1}^{n-1} f(x_i)\Delta_i x = S = A \tag{1.16}$$

となる．したがって，求めたい面積 A は次式となる．

$$A = \lim_{\Delta_i x \to 0} \sum_{i=1}^{n-1} f(x_i)\Delta_i x \tag{1.17}$$

上式の右辺を $\int_a^b f(x)dx$ と書きなおすのであるが，それは下記の理由に基づく．

- まず，微分のとき同様，変化量 Δx が十分に小さくなったものを dx と書きなおす．
- また，それぞれの区間が十分に小さくなったため，合計を表す記号として $\sum$ ではなく新たな記号 $\int$ を使うこととする．

  $\sum$ はギリシア文字で，英語のアルファベットでいうと s にあたる．これが使われたのは，英語で和を "sum" といい，その頭文字をギリシア文字で表したことに由来する．これに対し，$\int$ は英語の s を縦に細長く書いたものである．

  微分のときにも変化量は Δx，微小な変化量は dx を利用したように，ここでもギリシア文字とアルファベットを同じ方針で使い分けている．
- そして，$\sum$ と同様，和（積分）を計算する範囲を記号の下と上に付ける．

これで積分と面積の関係，そして記号の意味が理解できた．このような積分の定義の仕方を**区分求積法**とよぶ．

したがって，関数 $f(x)$ の定積分 $\int_a^b f(x)dx$ について，「$f(x)$ の前と後ろに記号 $\int_a^b$ と dx をくっつけた」と覚えるのはちょっとまずい．この覚え方だと，後ろに dx を付ける理由を忘れやすくなるからである．

そうではなく，

- まず，長方形の面積を表す $f(x_i)\Delta_i x$ がある．
- $\Delta_i x$ を小さくした極限として $f(x)dx$ がある．これは関数の値（縦の長さ）と x の変化量（横の長さ）の積なので，一つの小さな長方形の面積を表している．
- それを $x=a$ から $x=b$ まで足し合わせることを，$\int_a^b$ で表す．

の順で理解するのが適切である．

このような手順で導入された $\int_a^b f(x)dx$ を**定積分** (**definite integral**) とよぶ．

例 1.3（区分求積法） 定積分の定義に基づいて $A=\int_0^1 xdx$ を求めよう．この値は $x=0$，$y=0$，$x=1$，$y=x$ で囲まれる三角形の面積を表している．

区間 $[0,1]$ を均等に分割し，その範囲で A に含まれる長方形の組の面積 s，A を含む長方形の組の面積 S を求める．たとえば，10 等分した場合は図 1.21 となる．

10 等分の場合，

$$s=0+0.1\times 0.1+0.1\times 0.2+\cdots+0.1\times 0.9=0.1(0.1+0.2+\cdots+0.9)=0.45$$
$$S=0.1\times 0.1+0.1\times 0.2+\cdots+0.1\times 1.0=0.1(0.1+0.2+\cdots+1.0)=0.55$$

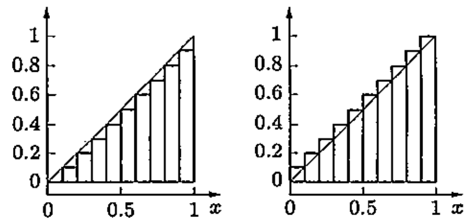


図 1.21 区分求積法

である．これを N 等分に一般化すると，

$$\begin{aligned} s&=0+\frac{1}{N}\times\frac{1}{N}+\frac{1}{N}\times\frac{2}{N}+\cdots+\frac{1}{N}\times\frac{N-1}{N}\\ &=\frac{1}{N}\left(\frac{1}{N}+\frac{2}{N}+\cdots+\frac{N-1}{N}\right)=\frac{1}{N^2}\cdot\frac{1}{2}N(N-1)=\frac{1}{2}\cdot\frac{N-1}{N}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} S&=\frac{1}{N}\times\frac{1}{N}+\frac{1}{N}\times\frac{2}{N}+\cdots+\frac{1}{N}\times\frac{N}{N}\\ &=\frac{1}{N}\left(\frac{1}{N}+\frac{2}{N}+\cdots+\frac{N}{N}\right)=\frac{1}{N^2}\cdot\frac{1}{2}N(N+1)=\frac{1}{2}\cdot\frac{N+1}{N}\end{aligned}$$

となる．区間の分割を細かくすることは，N を大きくすることが対応する．それぞれについて $N\to\infty$ とした極限をとると，$s\to\frac{1}{2}$，$S\to\frac{1}{2}$ となり，$s\leq A\leq S$ の関係から，$A=\int_0^1 xdx=\frac{1}{2}$ であることがわかる．

1.3.2 定積分，不定積分と微分

続いて，積分と微分を結びつけよう．

準備として，関数 $g(t)$ と x 軸が $a\leq t\leq x$ で作る面積を $G(x)$ とおく．これは式では

$$G(x)=\int_a^x g(t)dt \tag{1.18}$$

と表される．積分する区間の終端が x であり，この値が変わると面積も変わるため，面積 $G(x)$ は x の関数であることを確認しておこう（図 1.22）．

$G(x)$ を定義に従って微分してみる．まず，微分の定義の中で現れる $G(x+\Delta x)-G(x)$ を計算する．

$$\begin{aligned} G(x+\Delta x)-G(x)&=\int_a^{x+\Delta x} g(t)dt-\int_a^x g(t)dt\\ &=\int_x^{x+\Delta x} g(t)dt \qquad \text{（図 1.23 ② 参照）} \end{aligned}\tag{1.19}$$

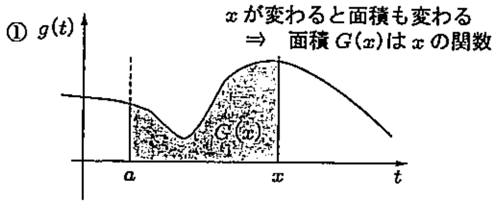


図 1.22　積分と微分①

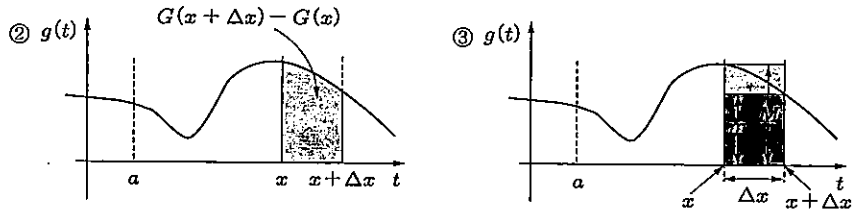


図 1.23　積分と微分②～③

前項と同様の方法で $\displaystyle\int_x^{x+\Delta x} g(t)dt$ の値を求めよう．$x \leq t \leq x+\Delta x$ での $g(t)$ の最小値を m，最大値を M とすると，

$$m\Delta x \leq \int_x^{x+\Delta x} g(t)dt \leq M\Delta x \quad \Leftrightarrow \quad m \leq \frac{\displaystyle\int_x^{x+\Delta x} g(t)dt}{\Delta x} \leq M$$

$$\Leftrightarrow \quad m \leq \frac{G(x+\Delta x)-G(x)}{\Delta x} \leq M \quad (1.20)$$

が成り立つ（図 1.23③）．

この式のすべての辺に対し，$\Delta x \to 0$ とした極限を求める．

$$\lim_{\Delta x\to 0} m \leq \lim_{\Delta x\to 0} \frac{G(x+\Delta x)-G(x)}{\Delta x} \leq \lim_{\Delta x\to 0} M \quad (1.21)$$

$\lim_{\Delta x\to 0} m = \lim_{\Delta x\to 0} M = g(x)$ となり，中央の式は関数 $G(x)$ の微分 $\dfrac{dG}{dx}$ にほかならないから，

$$\frac{dG}{dx} = g(x) \quad (1.22)$$

が成り立つ．つまり，$G(x)$ を x で微分すると $g(x)$ となる．このような関数 $G(x)$ を $g(x)$ に対する原始関数 (primitive function) とよぶ．

この関係が成り立つとき，$g(x)$ から $G(x)$ を求める操作を不定積分 (indefinite integral) とよび，定積分の記号を流用して

$$G(x) = \int g(x)dx + C \quad (C\ は定数) \quad (1.23)$$

と書く．これで，（ようやく）積分と微分が関連付けられた．なお，原始関数には，どんな値をとってもよい定数（積分定数とよぶ）C が現れる．これは，$G_1(x) = G(x) + C$（C は定数）とおいたときに，

$$\frac{d}{dx}G_1(x) = \frac{d}{dx}\{G(x)+C\} = \frac{d}{dx}G(x) = g(x) \quad (1.24)$$

が成り立ち，$G(x)$ も $G_1(x)$ もどちらも $g(x)$ の原始関数になるからである．

定積分は原始関数を利用して

$$\int_a^b g(x)dx = G(b) - G(a) \equiv \Big[G(x)\Big]_a^b \quad (1.25)$$

と求められる．

微分とは異なり，面積に基づく定義から不定積分を導出できる関数は少ないため，もっぱら微分の逆関数として不定積分を定義することが多い．また，積・商に関する公式も成り立たず，一般的に利用できるのは，後述する部分積分・置換積分くらいであるため，積分のほうが微分よりも（手計算では）難しい演算だといえる．

1.3.3　さまざまな関数の不定積分

不定積分のおもな性質，よく使う関数の不定積分を，表 1.3 および表 1.4 にまとめる．$f(x)$，$g(x)$ の原始関数をそれぞれ $F(x)$，$G(x)$，a を定数，C を積分定数とする．これらの導出の説明は A.3 節にまとめてあるので，必要な場合は参照のこと．

表 1.3　不定積分の性質

定数倍	$\int af(x)dx = a\int f(x)dx$
和・差	$\int \{f(x) \pm g(x)\}dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx$　（複号同順）
部分積分	$\int \left(\dfrac{df}{dx}\right)g(x)dx = f(x)g(x) - \int f(x)\left(\dfrac{dg}{dx}\right)dx$
合成関数（置換積分）	$\int f(x)dx = \int f(x)\dfrac{dx}{dt}dt = \int f(g(t))\dfrac{dg(t)}{dt}dt$

表 1.4 基本的な関数の積分

x^a	$\int x^a dx = \frac{1}{a+1}x^{a+1} + C \quad (a \neq -1)$
$\frac{1}{x}$	$\int \frac{1}{x} dx = \ln x + C$
三角関数	$\int \sin x\, dx = -\cos x + C, \quad \int \cos x\, dx = \sin x + C$
対数関数	$\int \ln x dx = x \ln x + x + C$
指数関数	$\int e^x dx = e^x + C, \quad \int e^{ax} dx = \frac{1}{a}e^{ax} + C$

1.3.4 速度と積分

積分の定義が終わったので，速度と位置を積分でつなげよう．位置 $x(t)$ を時間で微分すると速度 $v(t)$ である．これは

$$\frac{dx}{dt} = v(t) \tag{1.26}$$

であった．これを積分を使って書きなおしてみよう．$x(t)$ は $v(t)$ の原始関数であるから，不定積分を使うと

$$x(t) = \int v(t)dt + C \quad (C \text{ は積分定数}) \tag{1.27}$$

であり，定積分を使うと

$$\int_0^t v(\tau)d\tau = x(t) - x(0) \quad \Leftrightarrow \quad x(t) = \int_0^t v(\tau)d\tau + x(0) \tag{1.28}$$

である．定積分はそもそも図形の面積と対応していたことを思い出すと，$v(t)$ のグラフと $x(t)$ のグラフの関係は次の例のように説明できる．

例 1.4 図 1.24 のように，速度が $v(t) = \begin{cases} t & (0 \leq t < 1) \\ -t+2 & (1 \leq t < 2) \end{cases}$ で与えられており，$x(0) = 0$ の場合の $x(t)$ を求めよう．

速度と位置の関係（式 (1.28)）から，

$$x(t) = \int_0^t v(\tau)d\tau + x(0) \tag{1.29}$$

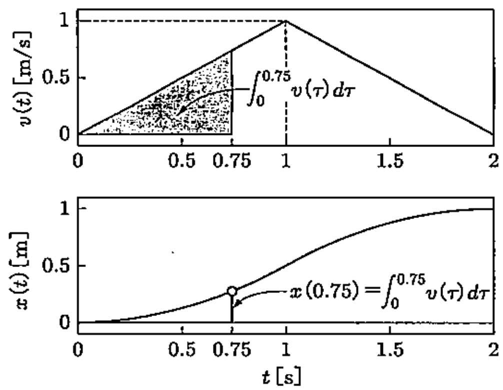


図 1.24 速度から位置を求める

であるので，$t = 0.75$ では次式で得られる．

$$x(0.75) = \int_0^{0.75} v(\tau)d\tau + 0 = \int_0^{0.75} \tau d\tau + 0 = \left[\frac{\tau^2}{2}\right]_0^{0.75} = 0.28125 \tag{1.30}$$

$v(t)$ のグラフにおける $0 \leq t \leq 0.75$（色がついている部分の面積）が，$x(0.75)$，つまり $x(t)$ のグラフの $t = 0.75$ での高さに対応している．

任意の t での $x(t)$ を求めるために場合分けをすると，それぞれ次のようになる．

- $0 \leq t < 1$ の場合

$$x(t) = \int_0^t v(\tau)d\tau + x(0) = \int_0^t \tau d\tau + 0 = \left[\frac{\tau^2}{2}\right]_0^t = \frac{t^2}{2}$$

- $1 \leq t < 2$ の場合

$$x(t) = \int_0^t v(\tau)d\tau + x(0) = \int_0^1 \tau d\tau + \int_1^t (-\tau+2)d\tau + 0 = \frac{1}{2} + \left[-\frac{\tau^2}{2} + 2\tau\right]_1^t$$
$$= -\frac{t^2}{2} + 2t - 1$$

速度から位置を求める場合に限らず，単位時間あたりの変化率から「これまでの合計」を求めるときに，定積分を利用できる．

例 1.5 (1) 1 [s] あたりの収入が $b(t)$ [円/s] だった場合，時刻 0 から t までの合計収入は $\int_0^t b(\tau)d\tau$ [円] である．

(2) バケツに流れ込む水の速度が $v(t)$ [m^3/s] だった場合，時刻 0 から t までに新た

にバケツにたまった水の量は $\int_0^t v(\tau)d\tau$ [m^3] である．

(3) コンデンサに流れ込む電流が $I(t)$ [A] だった場合，時刻 0 から t までに新たにコンデンサにたまった電荷量は $\int_0^t I(\tau)d\tau$ [C] である．

1.4 本章のまとめ

- 速度は $\dfrac{(\text{位置の変化量})}{(\text{かかった時間})}$ である
- 時間の変化を限りなく短くすることで「瞬間の」変化率が得られる
- 瞬間の変化率を求める演算が「微分」である
- 面積を求める演算を一般化したものが「積分」である
- 「積分」は「微分」の逆演算である

本章の議論に必要ないくつかの定理，定義などは補遺に改めて示すので，必要であれば参照されたい．

章末問題

1.1 時刻 t [s] に対する物体の位置 $x(t)$ [m] が図 1.25 のように与えられている．以下の時間区間における平均速度を求めよ．また，横軸に時刻，縦軸に速度を示したグラフを描け．

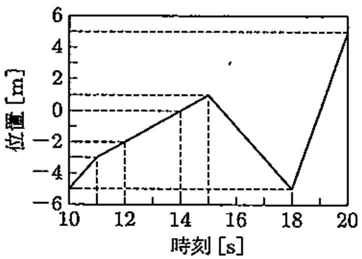


図 1.25 時刻と物体の位置

(1) 12 [s] から 14 [s]　　(2) 15 [s] から 18 [s]　　(3) 14 [s] から 20 [s]

解答 (1) $\dfrac{0-(-2)}{14-12} = 1$ [m/s]　(2) $\dfrac{-5-1}{18-15} = -2$ [m/s]　(3) $\dfrac{5-0}{20-14} = \dfrac{5}{6}$ [m/s]

速度のグラフは図 1.26 となる．

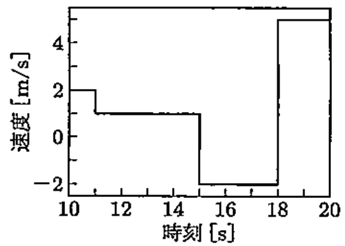


図 1.26 時刻と物体の速度

1.2 時刻 t [s] に対する物体の位置 $x(t)$ [m] が次式のように与えられている．ここから定義に基づいて $x(t)$ を微分し，速度 $v(t)$ および加速度 $a(t)$ を求めよ．

(1) $x(t) = t^2 + t + 1$　　(2) $x(t) = \dfrac{2t+1}{3t+1}$

解答 (1)

$$
\begin{aligned}
v(t) &= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{x(t+\Delta t) - x(t)}{\Delta t} \\
&= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{(t+\Delta t)^2 + (t+\Delta t) + 1 - (t^2+t+1)}{\Delta t} \\
&= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{t^2 + 2t\cdot\Delta t + \Delta t^2 + (t+\Delta t) + 1 - (t^2+t+1)}{\Delta t} \\
&= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{2t\cdot\Delta t + \Delta t^2 + \Delta t}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} (2t + \Delta t + 1) = 2t+1
\end{aligned}
$$

したがって，$v(t) = 2t + 1$ [m/s]

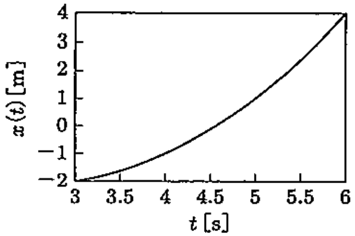
同様に，$a(t) = \displaystyle\lim_{\Delta t \to 0} \frac{v(t+\Delta t) - v(t)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{2(t+\Delta t) + 1 - (2t+1)}{\Delta t} = 2$

なので，$a(t) = 2$ [m/s^2] となる．

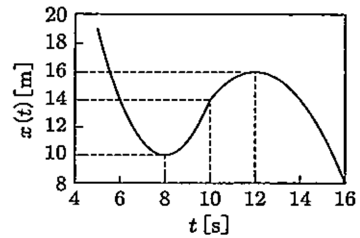
(2) (略解) $v(t) = -\dfrac{1}{(3t+1)^2}$，$a(t) = \dfrac{6}{(3t+1)^3}$

1.3 時刻 t [s] に対する物体の位置 $x(t)$ [m] が，図 1.27 のようにそれぞれ与えられている．ここから定義に基づいて $x(t)$ を微分し，速度 $v(t)$ および加速度 $a(t)$ を求め，図示せよ．

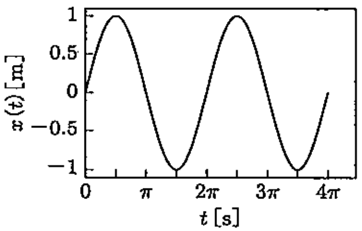
（1） $x(t)$ は t の二次関数である．



（2） $5 \leq t < 10, 10 \leq t < 16$ それぞれの区間で，$x(t)$ は t の二次関数である．



（3） $x(t)$ は正弦波である．



（4） $x(t)$ は正弦波である．

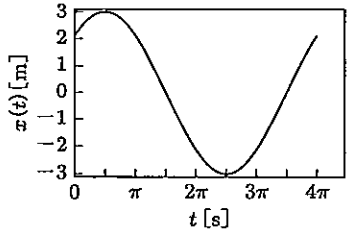


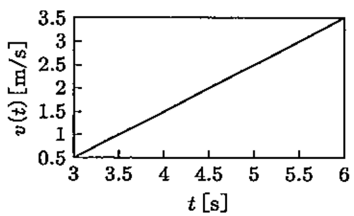
図 1.27 時刻に対する物体の位置

解答 (1) $(t, x) = (3, -2), (4, -1), (5, 1), (6, 4)$ を通ることから，$x(t) = 0.5t^2 - 2.5t + 1$ であることがわかる．これを時間で微分すると，

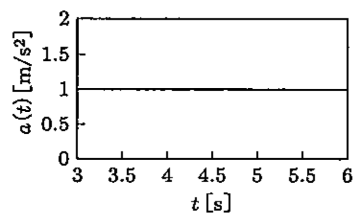
$$v(t) = \dot{x}(t) = t - 2.5, \quad a(t) = \ddot{x}(t) = 1$$

となる．図示すると図 1.28 となる．

(2) (略解) $x(t) = \begin{cases} (t-8)^2 + 10 & (5 \leq t < 10) \\ -(t-12)^2/2 + 16 & (10 \leq t < 16) \end{cases}$ である．これを時間で微分すると，



（a） 速度 $v(t)$



（b） 加速度 $a(t)$

図 1.28 (1) の解答

$$v(t) = \dot{x}(t) = \begin{cases} 2(t-8) & (5 \leq t < 10) \\ -(t-12) & (10 \leq t < 16) \end{cases}, \quad a(t) = \ddot{x}(t) = \begin{cases} 2 & (5 \leq t < 10) \\ -1 & (10 \leq t < 16) \end{cases}$$

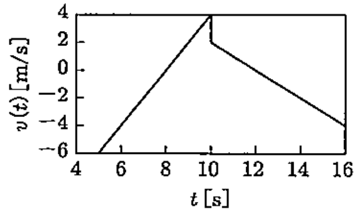
となる．図示すると図 1.29 となる．

(3) (略解) $x(t) = \sin t$ なので，

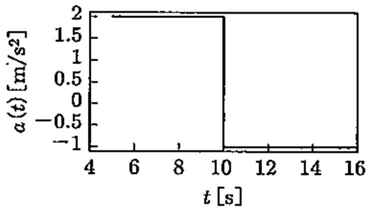
$$v(t) = \cos t, \quad a(t) = -\sin t$$

となる．図示すると図 1.30 になる．

(4) (略解) $x(t) = 3\sin(t/2 + \pi/4)$ なので，

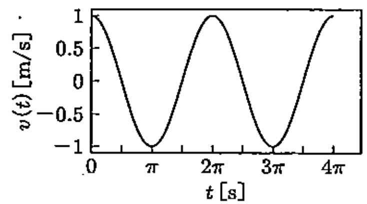


（a） 速度 $v(t)$

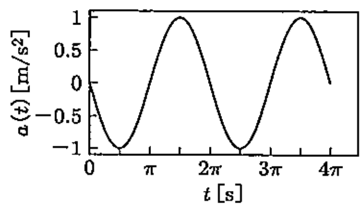


（b） 加速度 $a(t)$

図 1.29 (2) の解答

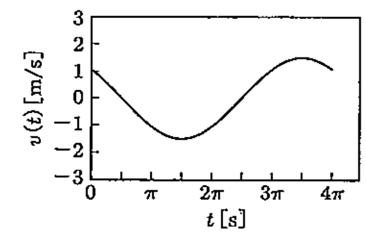


（a） 速度 $v(t)$

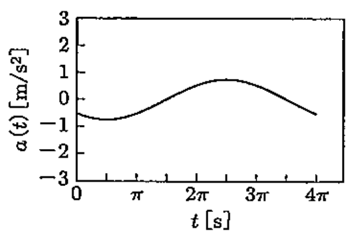


（b） 加速度 $a(t)$

図 1.30 (3) の解答



（a） 速度 $v(t)$



（b） 加速度 $a(t)$

図 1.31 (4) の解答

$$v(t)=\frac{3}{2}\cos\left(\frac{t}{2}+\frac{\pi}{4}\right),\quad a(t)=-\frac{3}{4}\sin\left(\frac{t}{2}+\frac{\pi}{4}\right)$$

となる．図示すると図 1.31 になる．

1.4 以下の関数を微分せよ．

(1) $f(t)=t^2+\sin t$　(2) $f(t)=\sqrt{t}$　(3) $f(t)=\ln t^2$

(4) $f(t)=e^{k+t}$ (k は定数)　(5) $f(t)=e^t\sin t$

解答 (1) $\dfrac{df}{dt}=\dfrac{d}{dt}(t^2+\sin t)=\dfrac{d}{dt}t^2+\dfrac{d}{dt}\sin t=2t+\cos t$

(2) $\dfrac{df}{dt}=\dfrac{d}{dt}\sqrt{t}=\dfrac{d}{dt}t^{\frac{1}{2}}=\dfrac{1}{2}t^{-\frac{1}{2}}=\dfrac{1}{2\sqrt{t}}$　(3) $\dfrac{df}{dt}=\dfrac{d}{dt}\ln t^2=\dfrac{d}{dt}2\ln t=\dfrac{2}{t}$

(4) $\dfrac{df}{dt}=\dfrac{d}{dt}e^{k+t}=e^k\dfrac{d}{dt}e^t=e^k\cdot e^t=e^{k+t}$

(5) $\dfrac{df}{dt}=\dfrac{d}{dt}(e^t\sin t)=\left(\dfrac{d}{dt}e^t\right)\sin t+e^t\dfrac{d}{dt}\sin t=e^t\sin t+e^t\cos t=e^t(\sin t+\cos t)$

1.5 以下の関数を微分せよ．

(1) $f(t)=\dfrac{1}{\sqrt{t^2+1}}$　(2) $f(t)=\ln\sin^2 t$　(3) $f(t)=e^{t^2}$

(4) $f(t)=e^t\sin\omega t$ (ω は定数)

解答

(1) $u=t^2+1$ とすると，$\dfrac{du}{dt}=2t$．また，$f=\dfrac{1}{\sqrt{u}}=u^{-\frac{1}{2}}$ なので，$\dfrac{df}{du}=-\dfrac{1}{2}u^{-\frac{3}{2}}$．

したがって，$\dfrac{df}{dt}=\dfrac{df}{du}\cdot\dfrac{du}{dt}=-\dfrac{1}{2}u^{-\frac{3}{2}}\cdot 2t=-t(t^2+1)^{-\frac{3}{2}}$ となる．

(2) $u(t)=\sin^2 t$ とすると，$\dfrac{du}{dt}=2\sin t\cos t$．また，$f=\ln u$ なので，$\dfrac{df}{du}=\dfrac{1}{u}$．

したがって，$\dfrac{df}{dt}=\dfrac{df}{du}\cdot\dfrac{du}{dt}=\dfrac{1}{u}\cdot 2\sin t\cos t=\dfrac{1}{\sin^2 t}\cdot 2\sin t\cos t=2\dfrac{\cos t}{\sin t}=\dfrac{2}{\tan t}$

となる．

(3) $u(t)=t^2$ とすると，$\dfrac{du}{dt}=2t$．また，$f=e^u$ なので，$\dfrac{df}{du}=e^u$．

したがって，$\dfrac{df}{dt}=\dfrac{df}{du}\cdot\dfrac{du}{dt}=e^u\cdot 2t=2te^{t^2}$ となる．

(4) $\dfrac{df}{dt}=\dfrac{d}{dt}(e^t)\cdot\sin\omega t+e^t\cdot\dfrac{d}{dt}(\sin\omega t)=e^t\sin\omega t+e^t\omega\cos\omega t$

$=e^t(\sin\omega t+\omega\cos\omega t)$

1.6 $f(t)=e^{kt}$，k は定数とする．$\dfrac{d^2f}{dt^2}=-f(t)$ が成り立つときの k を求めよ．

解答 $\dfrac{d^2f}{dt^2}=\dfrac{d^2}{dt^2}e^{kt}=k^2e^{kt}=k^2f(t)=-f(t)$ より，$k^2=-1$．したがって，$k=\pm j$ となる†．

[補足] $k=j$ のみでは不十分．二次方程式の解は複素数の範囲内では二つあり，それらはどのような場合でも求めることができるため，特別な場合を除いては二つとも示すべきである．

1.7 以下の等式が成り立つことを証明せよ．ここで f，g，h は微分可能な関数であるとする．

(1) $\dfrac{d}{dt}\{f(t)\}^2=2f\dfrac{df}{dt}$　(2) $\dfrac{d}{dt}\{f(t)g(t)h(t)\}=\dfrac{df}{dt}gh+f\dfrac{dg}{dt}h+fg\dfrac{dh}{dt}$

解答 (1) $\dfrac{d}{dt}\{f(t)\}^2=\dfrac{df}{dt}f+f\dfrac{df}{dt}=2f\dfrac{df}{dt}$

(2) $\dfrac{d}{dt}\{f(t)g(t)h(t)\}=\dfrac{df}{dt}gh+f\dfrac{d}{dt}(gh)=\dfrac{df}{dt}gh+f\dfrac{dg}{dt}h+fg\dfrac{dh}{dt}$

1.8 時刻 t [s] に対する物体の位置 $x(t)$ [m] が次式のように与えられている．速度 $v(t)$ および加速度 $a(t)$ を求めよ．単位を併記すること．

(1) $x(t)=\dfrac{1}{2}at^2+v_0t+x_0$ (a，v_0，x_0 は定数)　(2) $x(t)=A\sin\omega t$ (A，ω は定数)

(3) $x(t)=c_1+c_2t+c_3e^{-t}$ (c_1，c_2，c_3 は定数)

解答 (1) $v(t)=\dfrac{dx}{dt}=at+v_0$ [m/s]，$a(t)=\dfrac{dv}{dt}=a$ [m/s^2]

(2) $v(t)=\dfrac{dx}{dt}=A\omega\cos\omega t$ [m/s]，$a(t)=\dfrac{dv}{dt}=-A\omega^2\sin\omega t$ [m/s^2]

(3) $v(t)=\dfrac{dx}{dt}=c_2-c_3e^{-t}$ [m/s]，$a(t)=\dfrac{dv}{dt}=c_3e^{-t}$ [m/s^2]

1.9 以下の物理量を表す式を示せ．

(1) 高さ h に対する圧力 p の変化率
(2) 時間 t に対する圧力 p の変化率
(3) 温度 T に対する圧力 p の変化率
(4) 音源からの距離 l の変化に対する音量 v の変化率
(5) 明るさ L の光源からの距離 r に対する変化率
(6) 音量 P の音源からの距離 r に対する変化率
(7) 標高 H に対する水圧 p の変化率
(8) 時間 t の変化に対して位置 x が変化する割合
(9) 位置 x が時間 t の変化に対して変化する割合

† 本書では j を虚数単位として用いる．

解答

(1) $\dfrac{dp}{dh}$ (2) $\dfrac{dp}{dt}$ (3) $\dfrac{dp}{dT}$ (4) $\dfrac{dv}{dl}$ (5) $\dfrac{dL}{dr}$ (6) $\dfrac{dP}{dr}$ (7) $\dfrac{dp}{dH}$ (8) $\dfrac{dx}{dt}$ (9) $\dfrac{dx}{dt}$

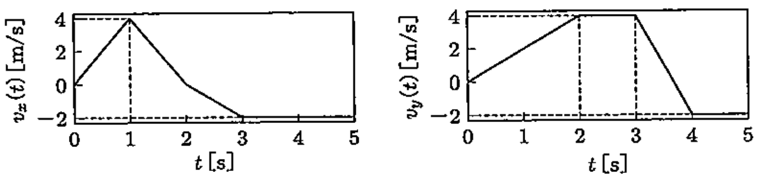
1.10 周波数 f [Hz] の正弦波を微分したときに，振幅と周波数はそれぞれどのようになるか．根拠とともに示せ．

解答 $\dfrac{d}{dt}(\sin 2\pi ft) = 2\pi f \cos 2\pi ft$ なので，振幅は $2\pi f$ 倍となり，周波数は変わらない．

1.11 周波数 f [Hz] の正弦波を積分したときに，振幅と周波数はそれぞれどのようになるか．根拠とともに示せ．

解答 $\displaystyle\int \sin 2\pi ft dt = -\frac{1}{2\pi f}\cos 2\pi ft$ なので，振幅は $\dfrac{1}{2\pi f}$ 倍となり，周波数は変わらない．

1.12 平面上を移動する物体の x 軸，y 軸方向の速度をそれぞれ速度 $v_x(t)$，$v_y(t)$ とし，図 1.32 のグラフで表されるとする（$t>5$ では速度は一定とする）．物体は時刻 $t=0$ で $x=1$，$y=2$ [m] を出発したとするとき，以下の設問に答えよ．



（a）x 軸方向の速度　（b）y 軸方向の速度

図 1.32 各軸における速度

(1) x の最大値を求めよ．
(2) $x(t)$，$y(t)$ のグラフを図示せよ．
(3) $x=y$ となる時刻とその時刻での位置を求めよ．
(4) 最初に y 軸に交わる時刻と，その時刻での位置を求めよ．
(5) $0 \le t \le 5$ での物体の平面上での軌跡を示せ．適宜計算機†を利用してよい．

解答 (1) $0 \le t < 2$ で $v_x > 0$ であるから，$t=2$ で x は最大となる．

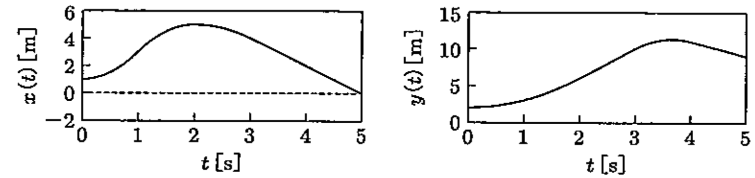
$$x(2) = \int_0^2 v_x(\tau)d\tau + x(0) = 4 + 1 = 5\,[\mathrm{m}]$$

† 「計算機」はいわゆる「コンピュータ」を示している．電卓のことではない．

(2)
$$x(t) = \begin{cases} 2t^2+1 & (0 \le t < 1) \\ -2t^2+8t-3 & (1 \le t < 2) \end{cases},$$

$$y(t) = t^2 + 2 \quad (0 \le t < 2)$$

を図示すると，図 1.33 となる．



（a）x 軸方向の位置　（b）y 軸方向の位置

図 1.33 各軸における位置

(3)（略解）

$-2t^2+8t-3 = t^2+2$ $(1 \le t < 2)$ を解いて，$t=1, 5/3$ が得られる．

[別解] グラフを重ねて描き（図 1.34），そこから読み取ってもよい．

(4)（略解） 図 1.33 (a) より，$x(5)=0$．よって，最初に y 軸に交わる時刻は 5 [s] である．図 1.32 (b) より，$y(5) = \displaystyle\int_0^5 v_y(\tau)d\tau + y(0) = 9$ [m]．よって，$(x(5), y(5)) = (0, 9)$．

(5)（略解） (3) で求めた式を利用すると，図 1.35 となる．

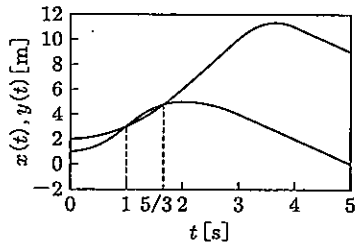


図 1.34 グラフの交点から時刻を求める

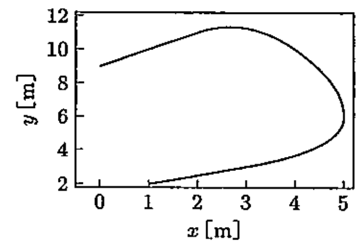
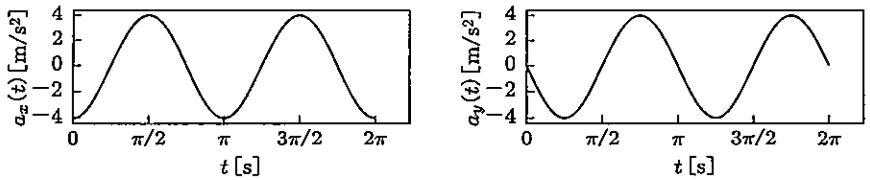


図 1.35 平面上での軌跡

1.13 平面上を移動する物体の x 軸，y 軸方向の加速度をそれぞれ $a_x(t)$，$a_y(t)$ とし，図 1.36 のグラフで表されるとする．加速度は正弦波であり，物体は時刻 $t=0$ で $x=2$，$y=0$ [m] を速度 $v_x=0$，$v_y=2$ [m/s] で出発したとするとき，以下の設問に答えよ．

(1) グラフから $a_x(t)$，$a_y(t)$ がどのような関数で表されるのかを示せ．
(2) $v_x(t)$，$v_y(t)$ を求め，図示せよ．　(3) $x(t)$，$y(t)$ を求め，図示せよ．
(4) $0 \le t \le \pi$ でのこの物体の平面上での軌跡を示せ．始点，および運動の方向がわかる



（a） x 軸方向の加速度　（b） y 軸方向の加速度

図 1.36　各軸における加速度

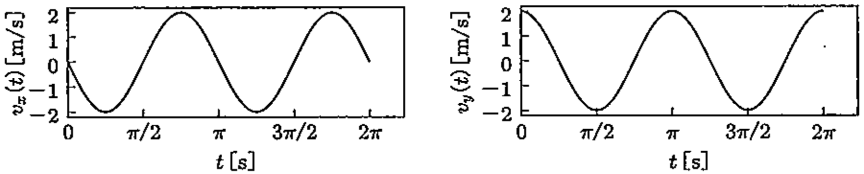
ようにすること．適宜計算機を利用してよい．

解答　(1)（略解）　$a_x(t)=-4\cos 2t,\quad a_y(t)=-4\sin 2t$

(2)

$$v_x(t)=\int_0^t a_x(\tau)d\tau+v_x(0)=-4\int_0^t\cos 2\tau d\tau+0=-4\left[\frac{1}{2}\sin 2\tau\right]_0^t$$
$$=-2\sin 2t$$
$$v_y(t)=\int_0^t a_y(\tau)d\tau+v_y(0)=-4\int_0^t\sin 2\tau d\tau+2=-4\left[-\frac{1}{2}\cos 2\tau\right]_0^t+2$$
$$=2\cos 2t$$

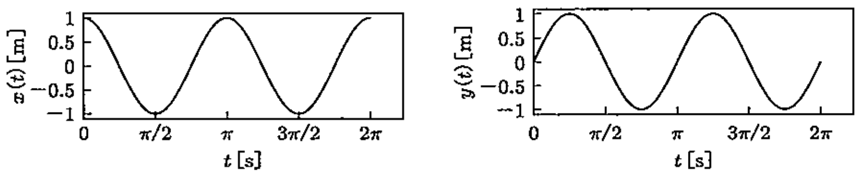
グラフは図 1.37 となる．



（a） x 軸方向の速度　（b） y 軸方向の速度

図 1.37　各軸における速度

(3)（略解）　$x(t)=\cos 2t$，$y(t)=\sin 2t$．グラフは図 1.38 となる．



（a） x 軸方向の位置　（b） y 軸方向の位置

図 1.38　各軸における位置

(4)（略解）　図 1.39 のような半径 1，原点中心の円となる．

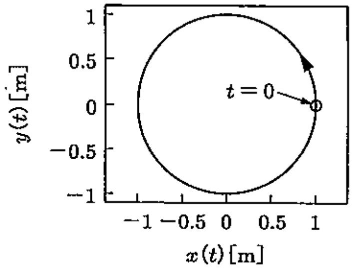


図 1.39　平面上での軌跡

1.14　区分求積法を利用して，以下の定積分を求めよ．

(1) $\displaystyle\int_0^1 x^2dx$　(2) $\displaystyle\int_0^x tdt$　(3) $\displaystyle\int_0^x t^2dt$

解答

(1)

$$s=\frac{1}{N}\left\{\frac{0^2}{N^2}+\frac{1^2}{N^2}+\cdots+\frac{(N-1)^2}{N^2}\right\}=\frac{1}{N^3}\{0^2+1^2+\cdots+(N-1)^2\}$$
$$=\frac{1}{N^3}\cdot\frac{1}{6}(N-1)N(2N-1)$$

同様に，$S=\dfrac{1}{N^3}\cdot\dfrac{1}{6}N(N+1)(2N+1)$．$N\to\infty$ で s，$S\to\dfrac{1}{3}$ より，$\displaystyle\int_0^1 x^2dx=\frac{1}{3}$．

(2) $s=\dfrac{x}{N}\left\{\dfrac{x}{N}+\dfrac{2x}{N}+\cdots+\dfrac{(N-1)x}{N}\right\}=\dfrac{x^2}{2}\cdot\dfrac{N-1}{N}$

同様に，$S=\dfrac{x^2}{2}\cdot\dfrac{N+1}{N}$．$N\to\infty$ の極限をとって，$\displaystyle\int_0^x tdt=\frac{x^2}{2}$．

(3)（略解）　$\displaystyle\int_0^x t^2dt=\frac{x^2}{3}$

[補足]　いずれも求めたい定積分に対し，大きい面積 S と小さい面積 s を求めて，それらの極限が一致することを示している．

解答（略解） (1) $f = e$ $;t + B\sin\sqrt{2}t)$ (2) $f = A\cos t + B\sin t$
(3) $f = C_1e^{2t} + C_2e^{-2t}$ $t) = A\cos\omega t + B\sin\omega t$
(5) $f(t) = e^{-3t}(A\cos$ (6) $f(t) = e^{\alpha t}(A\cos\beta t + B\sin\beta t)$
(7) $y(t) = -2e^{3t} + e^t$ (8) $y(t) = e^t\cos t$

3.21 （ばね・重り系） ばね定数 k のばねに質量 m の台車が図 3.12 (a) のようにつながれている．地面は水平であり，ばねは地面と平行に取り付けられている．台車と地面の間の摩擦はないと仮定する．以下の設問に答えよ．

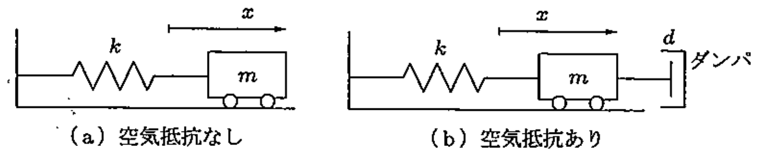


図 3.12 ばね・重り系

(1) つりあいの位置からばねが x だけ伸びたとき，ばねによる力はばねの伸びに比例し，ばねの伸びに逆方向である．台車が従う運動方程式を微分方程式で表せ．
(2) 台車を $x = l$ の位置まで伸ばし，静止させた後に手を離す．手を離した時刻を $t = 0$ としたときの台車の挙動 $x(t)$ を求め，図示せよ．
(3) 台車にダンパを取り付ける（図 (b)）．ダンパは空気抵抗（流体抵抗）による力を生み出す装置である．ダンパにより生み出される空気抵抗は速度 v と逆向きであり，大きさは速度に比例する（比例定数を d とする）．このとき，台車が従う運動方程式を微分方程式で示せ．
(4) (3) の状況で台車を $x = l$ の位置まで伸ばし，静止させた後に手を離す．手を離した時刻を $t = 0$ としたときの台車の挙動 $x(t)$ を求めよ．ただし，$m = 1$，$d = 2$，$k = 10$，$l = 1$ とせよ．
(5) 運動エネルギー $V = \frac{1}{2}mv^2$ とばねによる位置エネルギー $U = \frac{1}{2}kx^2$ の和 E の時間変化について，以下の設問に答えよ．
 i. E の時間微分に対し，図 (a) の台車が従う微分方程式から導かれる関係を代入することで，E が時間に依存せず一定であることを示せ．
 ii. E の時間微分に対し，図 (b) の台車が従う微分方程式から導かれる関係を代入することで，$\dot{E}$ が満たす条件を導け．さらに，その条件から $\lim_{t\to\infty} E(t)$，$\lim_{t\to\infty} x(t)$，$\lim_{t\to\infty} v(t)$ がどのようになるか述べよ．

解答 (1) $ma = -kx \Leftrightarrow m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx$

(2) $m\ddot{x} + kx = 0$ の特性方程式は $m\lambda^2 + k = 0 \Leftrightarrow \lambda = \pm j\sqrt{\frac{k}{m}}$.

したがって，一般解は $x(t) = A\cos\sqrt{\frac{k}{m}}t + B\sin\sqrt{\frac{k}{m}}t$．$x(0) = l$，$\dot{x}(0) = 0$ より，$A = l$，$B\sqrt{\frac{k}{m}} = 0 \Rightarrow A = l,\ B = 0$．したがって，求める台車の挙動は $x(t) = l\cos\sqrt{\frac{k}{m}}t$．図示すると図 3.13 となる．

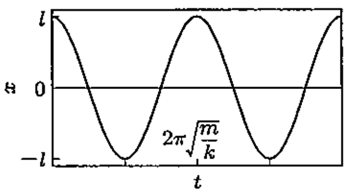


図 3.13 台車の挙動

(3)（略解） (1) の微分方程式の右辺に空気抵抗による力 $-dv = -d\frac{dx}{dt}$ が加わるので，$m\ddot{x} = -d\dot{x} - kx$.

(4)（略解） 特性方程式は $\lambda^2 + 2\lambda + 10 = 0$ であり，その解は $\lambda = -1 \pm 3j$.
したがって，一般解は $x(t) = e^{-t}(A\cos 3t + B\sin 3t)$
初期条件は $x(0) = 1$，$\dot{x}(0) = 0$ なので，これで A，B を定めると，

$$x = e^{-t}\left(\cos 3t + \frac{1}{3}\sin 3t\right)$$

(5) i.
$$E = V + U = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}kx^2,\quad \dot{E} = m\dot{v}v + k\dot{x}x = m\ddot{x}\dot{x} + k\dot{x}x$$

台車が従う微分方程式は $m\ddot{x} = -kx$ なので，これを代入すると，$\dot{E} = -k\dot{x} + k\dot{x}x = 0$ 時間変化率が 0 なので，E は一定であることが示された．

ii. $\dot{E} = m\ddot{x}\dot{x} + k\dot{x}x$ であり，台車が従う微分方程式は $m\ddot{x} = -d\dot{x} - kx$ なので，これを代入すると，$\dot{E} = (-d\dot{x} - kx)\dot{x} + k\dot{x}x = -d(\dot{x})^2 < 0$．$E \geq 0$ であり，$x = \dot{x} = 0$ でありかつそのときのみ $E = 0$ なので，$\lim_{t\to\infty} E(t) = 0$，$\lim_{t\to\infty} x(t) = 0$，$\lim_{t\to\infty} v(t) = 0$ がそれぞれ成り立つ．

3.22 （振り子） 質量 m の重りが長さ l の細い棒の一端に取り付けられている．棒のもう一端は自由に回転できるものとする．θ を棒の角度とし，鉛直下向きのとき $\theta = 0$，反時計回りを正とする．以下の設問に答えよ．
(1) 重りにかかる重力を，棒の鉛直方向と回転方向に分解し，それぞれの力の大きさを示せ．
(2) 回転方向で θ が満たすべき微分方程式を導け．
(3) (2) で求めた微分方程式の中での三角関数をテイラー展開により一次関数で近似せよ．このとき，近似可能な条件を明記すること．
(4) (3) で求めた微分方程式を解け．ただし，初期条件は $\theta(0) = \theta_0$，$\dot{\theta}(0) = 0$ とする．

解答 (1) 重りにかかる力を図示すると，図3.14となる．

図より，棒の鉛直方向にかかる力の大きさは $mg\cos\theta$，回転方向にかかる力の大きさは $mg\sin\theta$ である．

(2) 回転方向に移動する距離を x とおくと，運動方程式は $m\ddot{x}=-mg\sin\theta$．x と θ の間には $l\theta\equiv x$ の関係があるので，それを代入すると，$ml\ddot{\theta}=-mg\sin\theta \Leftrightarrow \ddot{\theta}=-\frac{g}{l}\sin\theta$ となる．

(3) $\sin\theta$ をテイラー展開すると，$\sin\theta=\sin 0+\cos 0\cdot\theta+\frac{1}{2}(-\sin 0)\theta^2-\frac{1}{3!}(-\cos 0)\theta^3+\cdots=\theta-\frac{1}{3!}\theta^3+\cdots$ となる．ここで，θ^3 が無視できるほど θ が十分小さいとすると，$\sin\theta\simeq\theta$ と近似できる．

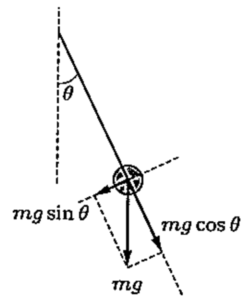


図3.14 振り子の重りにかかる重力

この条件下では，微分方程式は $\ddot{\theta}=-\frac{g}{l}\theta$ となる．

(4) $\ddot{\theta}+\frac{g}{l}\theta=0$ の特性方程式は $\lambda^2+\frac{g}{l}=0$．これを解くと，$\lambda=\pm j\sqrt{\frac{g}{l}}$．したがって，一般解は $\theta(t)=A\cos\sqrt{\frac{g}{l}}t+B\sin\sqrt{\frac{g}{l}}t$ となる．

初期条件を代入すると，$\theta(0)=A=\theta_0$，$\dot{\theta}(0)=B\sqrt{\frac{g}{l}}=0\Rightarrow B=0$．したがって，解は $\theta(t)=\theta_0\cos\sqrt{\frac{g}{l}}t$ となる．

3.23 **(RLC回路)** 抵抗 R の抵抗，インダクタンス L のコイルと容量 C のコンデンサが図3.15のように交流電源につながれている．

この回路の電源電圧 $E(t)$ と電流 $I(t)$，コンデンサの初期電圧 $E_C(0)$ との間には以下の関係が成り立つ．

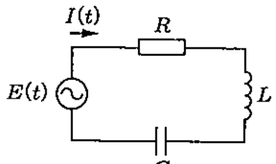


図3.15 RLC回路

$$E(t)=RI(t)+L\frac{dI}{dt}+\frac{1}{C}\int_0^t I(\tau)d\tau+E_C(0)$$

(1) $Q(t)=\int_0^t I(\tau)d\tau+Q(0)$ の関係を利用して $I(t)$，$\dot{I}(t)$ を $Q(t)$ を用いて表し，与式を Q に関する微分方程式とせよ．

(2) $E(t)=0$，$Q(0)=Q_0$，$\dot{Q}(0)=0$，つまり電源はなく，コンデンサに電荷が Q_0 たまっている状態を初期条件とする．このとき，$Q(t)$ が振動的な振る舞いとなる R，L，C の条件を求めよ．ただし，R，L，C はすべて0でなく正とする．

(3) $E(t)=0$，$Q(0)=Q_0$，$\dot{Q}(0)=0$，かつ $L=1$，$R=2$，$C=0.1$ のときの $Q(t)$ を求めよ．

解答 (1) $\frac{1}{C}\int_0^t I(\tau)d\tau+E_C(0)=\frac{1}{C}\int_0^t I(\tau)d\tau+\frac{Q(0)}{C}=\frac{1}{C}Q(t)$

$\dot{Q}=I$，$\ddot{Q}=\dot{I}$ をそれぞれ与式に代入すると，$E(t)=R\dot{Q}+L\ddot{Q}+\frac{Q}{C}$ が導ける．

(2) $E(t)=0$ より，$L\ddot{Q}+R\dot{Q}+\frac{Q}{C}=0$．特性方程式は，次式となる．

$$L\lambda^2+R\lambda+\frac{1}{C}=0 \quad\Leftrightarrow\quad \lambda=\frac{-R\pm\sqrt{R^2-4\frac{L}{C}}}{2L}$$

振動は，特性方程式が複素解をもつ場合なので，$R^2-4\frac{L}{C}<0$ が満たされる場合で生じる．

(3) 特性方程式は，

$$\lambda^2+2\lambda+10=0 \quad\Leftrightarrow\quad \lambda=\frac{-2\pm\sqrt{4-40}}{2}=-1\pm 3j$$

対応する一般解は，$Q(t)=e^{-t}(A\cos 3t+B\sin 3t)$．$Q(0)=A=Q_0$ なので，

$$Q(t)=e^{-t}(Q_0\cos 3t+B\sin 3t),$$
$$\dot{Q}(t)=-e^{-t}(Q_0\cos 3t+B\sin 3t)+e^{-t}(-3Q_0\sin 3t+3B\cos 3t),$$
$$\dot{Q}(0)=-Q_0+3B=0 \quad よって，\quad B=\frac{Q_0}{3}$$

したがって，$Q(t)=Q_0e^{-t}\left(\cos 3t+\frac{1}{3}\sin 3t\right)$ が得られる．

アナロジー（類似） ばね・重り・ダンパ系（演習問題3.21 (3)）とRLC回路（演習問題3.23 (1)）を見比べると，どちらも二階の微分方程式で表されていることがわかる．

$$m\ddot{x}+d\dot{x}+kx=F \quad (F(t)\ は外から加わる力) \tag{3.83}$$

$$L\ddot{Q}+R\dot{Q}+\frac{1}{C}Q=E \tag{3.84}$$

したがって，これらの振る舞いは，見た目が異なるものの数学的な特性は同じなので，同様の特徴をもつことがわかる．このように，見た目や分野が異なると思われる系の間にも，数学的な類似（アナロジー）があることがよくある．力学の問題がわかれば電気の問題もわかるし，その逆もいえるのである．このことは，物事の振る舞いを数学的に抽象化して取り扱うことの大きな利点の一つである．