

$$\begin{aligned} \frac{d(A/E_p)}{dw} &= -\frac{1}{2} \{ (w_p^2 - w^2)^2 + w^2 c_p^2 \}^{-3/2} \times \{ 2(w_p^2 - w^2)(-2w) + 2wc_p^2 \} \\ &= 2 \underbrace{\{ (w_p^2 - w^2)^2 + w^2 c_p^2 \}^{-3/2}}_{(1)} \times w \times \underbrace{\{ (w_p^2 - c_p^2/2) - w^2 \}}_{(2)}. \end{aligned} \quad (4.35)$$

(1) はつねに正なので、(2) の符号により振幅比の挙動が決まる。

$w_p^2 - c_p^2/2 \leq 0$ の場合は、式(4.35)の(2)はつねに負となって、振幅比は最大値を持たず、 w に関して減少する関数となる(例題では、 $c_p=2.0, 3.0$ の場合)。

$w_p^2 - c_p^2/2 \geq 0$ の場合は、以下の角振動数 w_{max} で式(4.35)の(2)が0となって、振幅比が最大値を持つことになる(例題では、 $c_p=0.25, 0.5, 1.0$ の場合)。

$$w_{max} = \sqrt{w_p^2 - c_p^2/2}. \quad (4.36)$$

抵抗が小さいほど、振幅比が最大値をとる外部系の角振動数が内部系の固有角振動数に近づき、かつ、振幅比も大きくなるのが式(4.36)および式(4.34)から予測できるだろう。この例題で最小抵抗となる $c_p=0.25$ の場合は、固有角振動数である $w_p(=1)$ 近傍で振幅比4の最大値を示している¹⁴。

位相については、式(4.34)より明らかなように、抵抗の大きにかかわらず、外部系の角振動数が内部系の固有角振動数と一致するときに、 $\pi/2$ 位相がずれる。

◀ 14 抵抗が0の場合に生じた共振現象との関係性について考えてみよう。外部系の角振動数 w と内部系の固有角振動数 w_p が一致していても、抵抗が0でない限り、式(4.34)の振幅 A の分母はゼロにならないので、振幅が無限大に発散することはない。しかしながら、抵抗が非常に小さい場合は、振幅比が発散しないまでも、非常に大きな値となることに変わりはない。実際のバネ装置や電気回路で考えれば、変動の振幅が極端に増幅するので、システムに大きなダメージを与える可能性があるだろう。したがって、外部系の角振動数 w と内部系の固有角振動数 w_p が一致するようなシステムは、広義の意味での「共振現象」と類似の現象が生じると考えるべきであり、そのような設計は避けなければならない。

問題

[4.1] 以下に示す定数パラメーターの2階線形非同次常微分方程式の厳密解を求めよ。

- (1) $T'' + 3T' + 2T = 8t^2, \quad T(0) = T'(0) = 0$
- (2) $T'' - T' = 2t, \quad T(0) = -1, \quad T'(0) = 4$
- (3) $T'' + T = 4t, \quad T(0) = -1, \quad T'(0) = -1$
- (4) $T'' - 4T' + 3T = e^{2t}, \quad T(0) = 0, \quad T'(0) = 3$
- (5) $T'' - 4T' + 3T = e^t, \quad T(0) = 0, \quad T'(0) = 3$
- (6) $T'' - 4T' + 4T = e^{2t}, \quad T(0) = 0, \quad T'(0) = 3$
- (7) $T'' + 9T = \cos t, \quad T(0) = 0, \quad T'(0) = 3$
- (8) $T'' + 9T = 6 \cos 3t, \quad T(0) = 1, \quad T'(0) = 3$

[4.2] \sin 波の外力が作用するバネ・質点系の運動方程式(4.10)が引き起こす共振現象についてエネルギー保存則の視点から考察したい。

- (1) 3.5節に於いて式(4.10)を積分することにより、この系のエネルギー保存則の一般系を導出して、外力が系に対してなす仕事については、外力の関数と速度 v を用いて積分形で表現せよ。
- (2) 上で導いた外力のなす仕事に、共振時の速度の解析解(4.24)を代入し、エネルギーが系に蓄積されていくことを確認せよ。

[4.3] 4.2節で学んだ抵抗の働かないバネ・質点系において、 \sin 波の外力を $g(t) = F_0 e^{-2t}$ のような関数に置き換えた場合の変位の一般解を求めて、解の挙動を考察せよ。

5

数値解析による常微分方程式の解法

- 5.1 解法の基本的な考え方
- 5.2 オイラー法
- 5.3 4次のルンゲ・クッタ法
- 5.4 多元連立1階常微分方程式の数値解法
- 5.5 n 階常微分方程式の数値解法

数値解析法による常微分方程式の解法を学ぶ。数値解析は、原理上、あらゆる常微分方程式の解を得ることができるが、あくまで近似解である。したがって、誰が解いても必ず同じ答となる厳密解とは異なり、近似の方法や、独立変数の解像度などによって得られる解が微妙に異なる。具体的な数値解法として、精度は劣るがアルゴリズムの簡単なオイラー法と、精度は高いがアルゴリズムがやや複雑なルンゲ・クッタ法、この2つを例として取り上げる。とりわけ、後者の4次のルンゲ・クッタ法は今なお実用で広く用いられている事実上の万能解法である。いずれも、1階導関数の関数形(すなわち従属変数—独立変数のグラフにおける接線の傾き)が既知であることをより所として、開始時刻から、微小時間(=独立変数の解像度)ずつ、逐次、接線の傾きに沿って時間を進めていく。オイラー法は、1つの接線の傾きだけを用いるが、ルンゲ・クッタ法は、4つの接線の傾きを用いてそれらを加重平均することによって時間を進め、精度を高める。

5.1 解法の基本的な考え方

数値解析を用いることにより、原理上、あらゆる常微分方程式の近似解を得ることができる。事実上の万能解法である。いくつかの数値解法があるが、精度は悪いがもっとも基本的な解法であるオイラー法と、高精度で広範に実用されているルンゲ・クッタ法の2つを紹介しよう。いずれの手法も基本的な考え方は共通で、以下のステップをとる¹。

ステップ1 解くべき常微分方程式を変形して、1階の導関数を独立変数と従属変数を使用して関数で表現する。この1階導関数の関数形は、独立変数と従属変数の時系列図における接線の傾きを意味するものである。

たとえば、

$$a \frac{dT}{dt} + bT + c = 0 \text{ ならば、 } g(t, T) = \frac{dT}{dt} = -\frac{b}{a}T - \frac{c}{a}.$$

このような $g(t, T)$ という関数を定義しておく。

◀ 1 ここで取り上げる2つの方法以外の数値解析法も、その基本的な考え方は同じである。

ステップ2 数値解法は、厳密解と異なり、指定した独立変数の値に対応した従属変数の近似値を与えるものである。そこで、独立変数の解像度（刻み幅）を決める。刻み幅は、必ずしも一定値である必要はない^{◀2}。

ステップ3 テイラー展開とステップ1における1階の導関数形を利用して、常微分方程式を四則演算式で近似する。これを**差分化**と呼ぶ。その時の近似精度は、テイラー展開で満足する項数で評価する。初期条件から、逐次、刻み幅分だけ上記の近似された四則演算式で時間を進めて、独立変数の値に対応する従属変数値を求めていく。

ステップ4 n 階の常微分方程式の場合は、まず、 n 元連立1階の常微分方程式に変換して^{◀3}、ステップ1～ステップ3の解法を適用する。

5.2 オイラー法

時間 t (独立変数) に依存する温度 T (従属変数) の1階常微分方程式を例にとって説明しよう。

ステップ1 1階導関数（時系列図の接線の傾き）の関数表現 常微分方程式を $f\left(T, \frac{dT}{dt}, t\right) = 0$ とすれば、これを以下のように変形して、1階導関数を従属変数 T と独立変数 t を使って関数 $g(t, T)$ で表現する。

$$\frac{dT}{dt} = g(t, T), \quad \text{初期条件: } T(0) = T_0 \quad (5.1)$$

$g(t, T)$ に任意の独立変数 t と従属変数 T を代入することにより、1階導関数の値が一義的に決定される。これは、独立変数（横軸）と従属変数（縦軸）の時系列図における接線の傾きが与えられることに相当する^{◀1}。

ステップ2 解像度（刻み幅）の決定 時間（独立変数）の刻み幅 Δt を決めて、初期状態から出発して、逐次、近似解を求めていく^{◀2}。

$$T(0) = T_0 \rightarrow T(\Delta t) \rightarrow T(2\Delta t) \rightarrow \dots \rightarrow T(t) \rightarrow T(t + \Delta t) \rightarrow T(t + 2\Delta t) \rightarrow \dots$$

独立変数、従属変数それぞれに通し番号を付けて識別しておく。

$$t_0 = 0, \quad t_1 = \Delta t, \quad t_2 = 2\Delta t, \quad \dots, \quad t_n = n\Delta t, \quad \dots, \quad t_{n_{\max}} = n_{\max} \Delta t.$$

$$T_0 = T(0), \quad T_1 = T(\Delta t), \quad T_2 = T(2\Delta t), \quad \dots,$$

$$T_n = T(n\Delta t), \quad \dots, \quad T_{n_{\max}} = T(n_{\max} \Delta t). \quad (5.2)$$

ステップ3 差分化

ここで、テイラー展開を基礎として、 $T(t)$ と $T(t + \Delta t)$ の関係から微分

◀2 この章では、解像度を一定として説明する。実用的に使用されている数値計算プログラム（ライブラリー）では、プログラムの中で計算精度をチェックしながら、必要な時間解像度を自動的に決定してくれる場合もある。

◀3 5.5節でこの変換方法を述べる。

◀1 第1章の図1.3を復習してほしい。未定定数 = 切片の値がそれぞれ異なる一般解でも、ある独立変数値に対応するそれらの接線の傾きはいずれも等しくなり得る。つまり、一般解の中から真の解（従属変数）を特定できなくても、解の傾き（従属変数の1階導関数）は特定できるのである。

◀2 時間解像度の決め方は任意である。あまり小さくすると、多くの逐次計算をするため計算時間がかかるであろうし、あまり大きくすると、近似の精度が悪くなる。

関係を四則演算に近似することを考える。すなわち、

$$T(t + \Delta t) = T(t) + \frac{\Delta t}{1!} T'(t) + \frac{\Delta t^2}{2!} T''(t) + \frac{\Delta t^3}{3!} T'''(t) + \frac{\Delta t^4}{4!} T^{(4)}(t) + \dots \quad (5.3)$$

2階微分以上の高階項を無視すれば^{◀3},

$$T(t + \Delta t) \cong T(t) + \Delta t T'(t). \quad (5.4)$$

式(5.4)に、1階導関数形 $g(t, T)$ (5.1) および変数識別子(5.2)を代入すると以下となる。

$$\begin{aligned} T_1 &= T_0 + \Delta t g(t_0, T_0), \\ T_2 &= T_1 + \Delta t g(t_1, T_1), \\ &\vdots \\ T_{n+1} &= T_n + \Delta t g(t_n, T_n). \end{aligned} \quad (5.5)$$

すなわち、初期値 T_0 から出発して、 T_1, T_2, \dots, T_n と、逐次、数値解を四則演算式から反復計算なしに求めることができる^{◀4}。このような数値解法を**オイラー法**と呼ぶ。独立変数と従属変数の時系列図（図5.1）から式(5.4)の差分近似の意味を考えてみる。現在時刻 t_n における従属変数 T_n を起点 (t_n, T_n) とする。時系列図では●で示してある。そこから、時間を刻み幅分 (Δt) だけ進めて、次の未来時刻 t_{n+1} における従属変数 T_{n+1} を決定したい。ステップ1で定義した1階導関数の関数式に起点 (t_n, T_n) の座標を代入した値、すなわち $g(t_n, T_n)$ は、その点における時系列図曲線の接線の傾きを意味する。これを、直線的に Δt 秒ぶんどりだけ延長して、 T_{n+1} を決定する。すなわち時系列図曲線上で、現在時刻から $g(t_n, T_n)$ の角度で鉄砲を発射して Δt 後に鉄砲玉が直線上にたどりつく先が T_{n+1} である。予測値の座標 (t_{n+1}, T_{n+1}) は、時系列図中○で示してある。起点となる現在の従属変数値 T_n が真値であるとしても、 Δt 秒後の予測値は真値（図中△）と誤差をもつ。実際には、初期値か

◀3 (5.3)の右辺項の Δt は微少なので、 $\Delta t, \Delta t^2, \Delta t^3$ と項数が高くなるとともにその値も小さくなっていく。はじめの2項だけでも、それなりの精度が得られるのはそのためである。

◀4 反復計算なしに、時間を進めていける差分法を陽解法 (explicit method) と呼ぶ。それに対して、時間を進める際に繰り返し計算を必要とするものを陰解法 (implicit method) と呼ぶ。

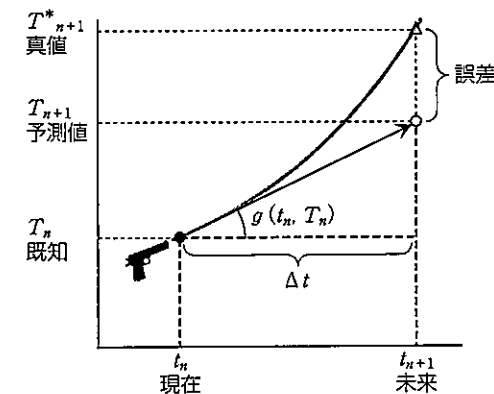


図5.1 オイラー法による数値解析法概念図

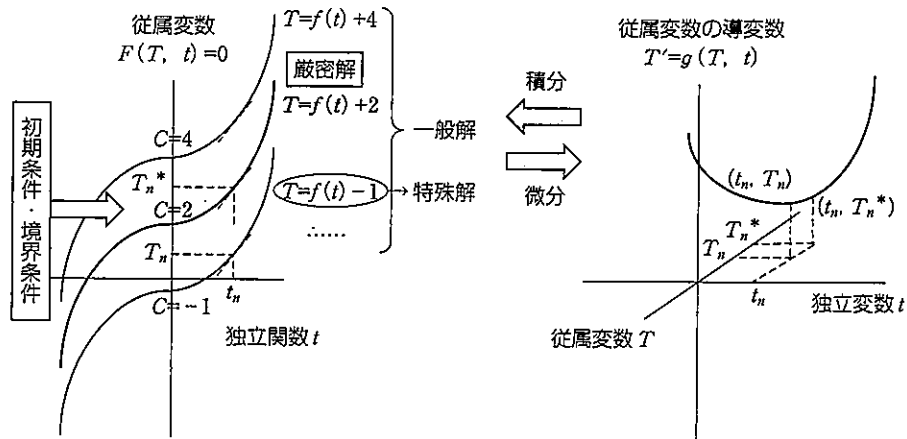


図 5.2 1階導関数値の数値解における図的解釈

ら逐次、時間を進めていくに従って、徐々に誤差が蓄積されていく可能性があることに留意しなければならない。

刻み幅 Δt が十分小さな値を取るとすれば、 $\Delta t, \Delta t^2, \Delta t^3, \dots$ としだいに小さくなるだろう。したがって、テイラー展開 (5.3) の高次の導関数項ほどその寄与も小さくなると予想される。式 (5.3) の高次項まで残せば、近似精度は、より上がることが期待される。式 (5.4) のオイラー法は、 Δt の1次まで残して近似しているので、1次オーダーの差分近似と呼ぶ^{◀5}。

現在時刻の近似解 T_n に誤差が含まれているとすると、その接線 $g(t_n, T_n)$ も真の厳密解の接線ではないだろう。そこで、 $g(t_n, T_n)$ の意味を考えてみる^{◀6}。

図 5.2 は、従属変数—独立変数の2次元グラフ (左図) と、従属変数の1階導関数—独立変数—従属変数の3次元グラフ (右図) を対比させたものである。現在時刻の近似解 T_n に誤差が含まれているということは、従属変数—独立変数のグラフにおける厳密解曲線ではなく、それに近い別の特殊解の曲線上にいることになる。すなわち、右図の3次元グラフにおいて、任意の独立変数と従属変数値を代入して得られる1階導関数値 $g(t_n, T_n)$ というのは、 (t_n, T_n) の組み合わせを代入した際に解となり得る1つの特殊解の曲線上の接線の傾きを意味しているのである^{◀7}。すなわち、オイラー法は、現在時刻において、厳密解に近いがそれとは異なる1つの特殊解の曲線上にあるとして、そこでの接線を用いて、時間解像度分だけ将来の値を直線外挿で予想しているといえる。次のルンゲ・クッタ法ではその精度を高めるため、1つではなく4つの特殊解上の接線を用いる。

◀5 はじめの2項だけでも、それなりの精度が得られるのは、低次の項ほど解への寄与が大きいためである。

◀6 この意味が理解できれば、次に述べるルンゲ・クッタ法もアルゴリズムはやや複雑であるが、その原理は理解しやすいだろう。

◀7 たとえば、第1章図1.3の例のように、 $T=3t^2$ という単純な例では、1階の導関数が独立変数 (時間) だけの関数であるので、同じ独立変数に対する接線の傾きは厳密解の傾きと等しくなる。

5.3 4次のルンゲ・クッタ法

オイラー法と同様、時間 t (独立変数) に依存する温度 T (従属変数) の1階常微分方程式を例にとって説明する。ステップ1からステップ2までは、オイラー法とまったく同様であるが、ステップ3からの差分化の方法が異なり、テイラー展開の高次項まで満足されるように工夫して、精度を向上させ、実用に広く使用されているのが、4次のルンゲ・クッタ法である。

オイラー法では、現時刻を起点として1つの傾きの情報だけから Δt 秒後の従属変数の値を予測した。4次のルンゲ・クッタ法では、4つの異なる傾きを用いて Δt 秒後の仮予測を行い、それらの予測値を重み付け平均して、 Δt 秒後の予測値を決定する^{◀1}。オイラー法の図解 (図 5.1) より明らかなように、仮予測に用いる傾きは現時刻の情報だけでなく、未来時刻に関連した情報を使うことが好ましい。その際の問題は、未来時刻の従属変数値は未知なので、傾きも未知であることである^{◀2}。そこで妥協案として、オイラー法による予測値をステップ1の1階導関数形に代入して、仮予測値での傾きの値を求めて、その傾きを用いて再度現時刻から予測を行って異なる仮予測値を求める。以下同様に、次々と異なる仮予測値から異なる傾きを算定し、複数の仮予測値を見出すことを考える。図 5.3 を見ながら解説しよう。

試射1 オイラー法によって Δt 秒後の仮予測値を求める。この第1試射による T_n からの従属変数の Δt 秒後の変化量を h_1 とする。

$$h_1 = \Delta t g(t_n, T_n). \quad (5.6)$$

試射2 オイラー法による現時刻座標と Δt 秒後の予測座標値の中間の座標 $(t_n + \Delta t/2, T_n + h_1/2)$ をステップ1で準備した1階導関数に代入して、その点における時系列図曲線の傾き $g(t_n + \Delta t/2, T_n + h_1/2)$ を求める。現時刻の座標 (t_n, T_n) を起点として、今度はこの傾きを用いて第2試射を行い、 Δt 秒後の仮予測値を求める。この第2試射による T_n からの従属変数の Δt 秒後の変化量を h_2 とする^{◀3}。

$$h_2 = \Delta t g(t_n + \Delta t/2, T_n + h_1/2). \quad (5.7)$$

試射3 第2試射による現時刻座標と Δt 秒後の予測座標値の中間の座標 $(t_n + \Delta t/2, T_n + h_2/2)$ をステップ1で準備した1階導関数に代入して、その点における時系列図曲線の傾き $g(t_n + \Delta t/2, T_n + h_2/2)$ を求める。現時刻の座標 (t_n, T_n) を起点として、今度はこの傾きを用いて第3試射を行い、 Δt 秒後の仮予測値を求める。この第3試射による T_n からの従属変数の Δt 秒後の変化量を h_3 とする。

◀1 オイラー法では、1つの特殊解曲線上の傾きを使用した。厳密解がわからない以上は、それに近いと思われるより多くの特殊解の接線情報を使用したいという発想は当然であろう。

◀2 将来の値を使用すると、そこで繰り返し計算 (陰解法) が必要となり、より多くの計算時間を要するので、できるだけ陽解法で計算を行いたいという考えである。

◀3 図 5.2 を参考にすれば、右図の3次元の導関数グラフにおいて、独立変数も従属変数も、現時刻レベルと異なる値が代入されることになる。すなわち、左図でオイラー法とは異なる特殊解曲線上の傾きを求めことになる。

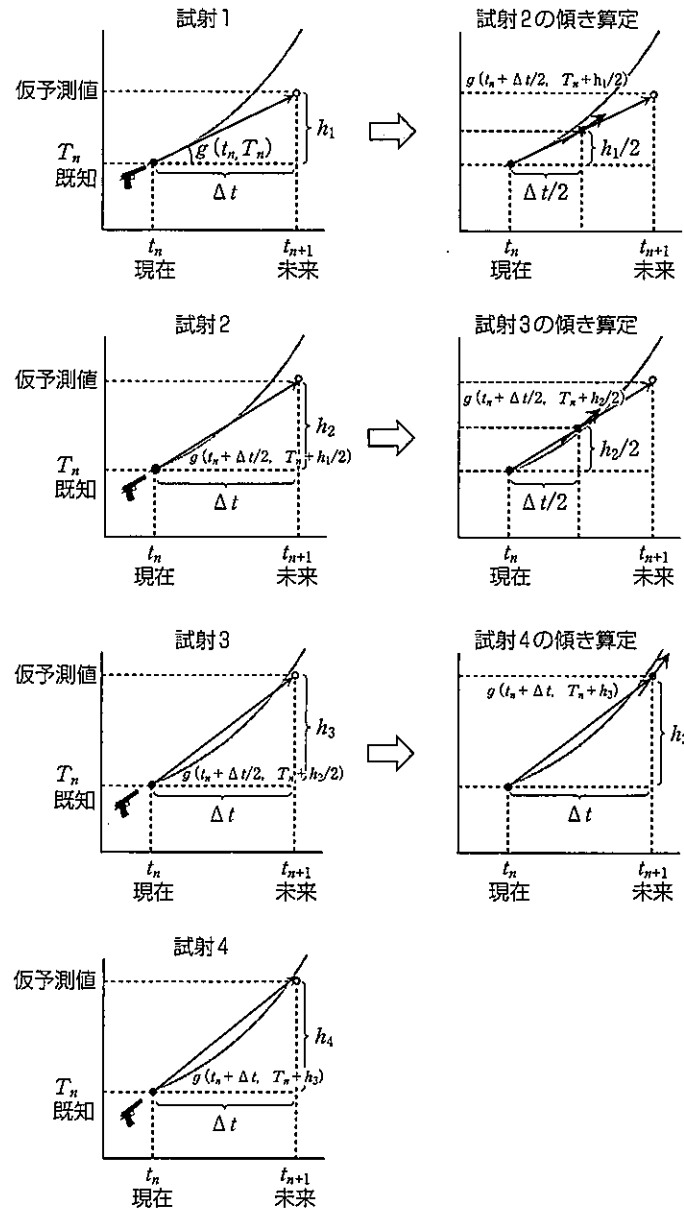


図 5.3 ルンゲ・クッタ法による解法概念図

$$h_3 = \Delta t g(t_n + \Delta t/2, T_n + h_2/2). \quad (5.8)$$

試射 4 第 3 試射による Δt 秒後の予測座標値の座標 $(t_n + \Delta t, T_n + h_3)$ をステップ 1 で準備した 1 階導関数に代入して、その点における時系列図曲線の傾き $g(t_n + \Delta t, T_n + h_3)$ を求める。現時刻の座標 (t_n, T_n) を起点として、今度はこの傾きを用いて第 4 試射を行い、 Δt 秒後の仮予測値を求める。この第 4 試射による T_n からの従属変数の Δt 秒後の変化量を h_4 とする

◀ 4 図 5.2 と合わせて図 5.3 の補足説明を加える。試射 1 の現在時刻における座標は、初期条件でなければ多少の誤差を含んでいるであろう。したがって、現在座標が乗っている曲線は厳密解ではなく、それに近い特殊解の一つである。試射 2~4 の傾きの算定に用いられるそれぞれの座標値はいずれも、現在座標値を解として含む特殊解の曲線には乗っていない。図中には示していないが、それぞれの座標値は、その座標値を解として含む特殊解の曲線上に存在している。

◀ 5 再び、図 5.2 を参考にすれば、4 つの試射の際に使用する傾きとは、結局、以下の独立変数-従属変数の座標値を解とする 4 つの異なる特殊解曲線上におけるその座標値での接線を用いていることになる。
 (t_n, T_n)
 $(t_n + \Delta t/2, T_n + h_1/2)$
 $(t_n + \Delta t/2, T_n + h_2/2)$
 $(t_n + \Delta t, T_n + h_3)$

$$h_4 = \Delta t g(t_n + \Delta t, T_n + h_3). \quad (5.9)$$

予測値の決定 以上、4 回の試射から 4 つの異なる仮予測値が求めたので、それを以下のように重み付けして、 Δt 秒後の最終的な従属変数の予測値とする。

$$T_{n+1} = T_n + \frac{1}{6}(h_1 + 2h_2 + 2h_3 + h_4). \quad (5.10)$$

実は、この 4 次のルンゲ・クッタ法は、テイラー展開 (5.3) の Δt^4 の項までを満足しており、4 次オーダーの精度をもつことが証明できる

なぜ試射 2, 3 において次の試射に用いる傾きの評価点が中点の座標なのか、4 つの試射から予測値を決定する際の重み係数はどのように決まっているか、疑問に思われるだろうが、結果として、4 次オーダーになるような係数の組み合わせになっているのである。ちなみに、この組み合わせ以外にも、4 次オーダーの組み合わせは存在する。

ここまで説明してきた 1 階の常微分方程式に関する数値解析法において、ステップ 1 で定義される 1 階の導関数の関数形 $g(t, T)$ には何の制約もなかったことを強調したい

$g(t, T)$ が、非線形であれ、非同次形であれ、同じ解法である。ただし、逐次計算で時間を進めるうちに、誤差がどんどん蓄積され、予測値が真値を大きくはずれる「数値解の発散」が生じることがある。また、解が発散しないまでも、実用的に許容しえないような誤差を含む解が得られる可能性もあるので、注意が必要である。

◀ 6 式 (5.6)~(5.10) までの式をテイラー展開して、式 (5.3) の 4 次の項までと比較することにより、4 次オーダーとなることを確認できる。章末の問題参照。

◀ 7 1 階導関数がどのような形であれ、その関数形が既知でありさえすれば、任意の独立変数と従属関数の値を代入することによって導関数の値が計算される。

例題 5.1

例題 2.1 で取り上げた「個体数によって自己増殖に抑制を受ける生物-ロジスティック曲線」の問題について厳密解と数値解を比較して、数値解析法の特徴を考察する。1 階の非線形常微分方程式 (2.26) は、以下であった。

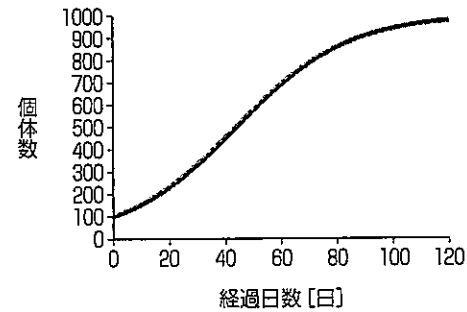
$$\frac{dN}{dt} = (a_3 - a_4 N)N.$$

$a_3 = 0.05$ [1/日], $a_4 = 0.00005$ [1/匹/日], 初期値 $N_0 = 100$ [匹] とする。 $t = 0$ から 120 [日] までの個体数の時系列図を作成し、厳密解、オイラー法、ルンゲ・クッタ法を比較し結果が良く一致することを確認せよ。時間解像度は 1.0 [日] とする。

解答例

図 5.4 に示すように、この例題では、厳密解、オイラー法、ルンゲ・クッタ法はよく一致している。使用した従属変数が 1 つの場合のオイラー法およびルンゲ・クッタ法の Java プログラムの例を図 5.5 およ

び図5.6に示した。



— 厳密解, - - オイラー法, ... ルンゲ・クッタ法

図5.4 ロジスティック曲線の数値解と厳密解の比較
3つの解はよく一致し、重なって見える。

```

1 import java.io.*;
2
3 class Euler
4 {
5     public static void main(String arg[])
6     {
7         double n,t,dt,tmax,h0; //オイラー法関連変数の定義
8
9         n = 100.0; // n 個体数(匹)の初期値を入力
10        dt = 1.0; // dt 時間解像度(s)を入力
11        tmax = 120.0; // tmax 計算継続時間(s)を入力
12
13        Euler f=new Euler();
14
15        try
16        {
17            FileWriter fw=new FileWriter("Example5-1-Eular.data");
18
19            for(t = 0; t <= tmax; t += dt)
20            {
21                fw.write(+ t + " " + n + "\n");
22
23                h0=dt*f.g(t,n);
24                n=n+h0;
25            }
26            fw.close();
27        }
28        catch (Exception e)
29        {
30            System.out.println(e);
31        }
32    }
33
34    double g(double t,double n) // nの階導関数形の定義
35    {
36        double a3,a4; // 問題とする系のパラメーターの定義
37        a3 = 0.05; // a3 (day-1)
38        a4 = 0.00005; // a4 (匹-1・day-1)
39
40        return ((a3-a4*n)*n);
41    }
42
43 }
44
45
46 }

```

◀ 8 プログラムの簡単な説明

7行~11行: 変数を定義している。doubleとは倍精度の実数。

17行目: データの書き出し Example5-1-Eular.data という名前のファイルが生成される。

19行~24行: 時間解像度ずつオイラー法で時間を進めている。23行目で使用されている1階の導関数gはプログラムの下の方で別途定義される。

37行~43行: 1階導関数の定義

37行目のgという関数を使用する独立変数(t)と従属変数(n)が定義されている。従属変数nは初期値から時間更新とともに逐次書き出されており、書き出されるデータファイル以外には残らない。43行目のreturnで具体的な関数形がパラメーターとともに定義されている。

図5.5 Javaによるオイラー法のプログラム例(1従属変数)◀8

1従属変数の常微分方程式には、このプログラムが修正の上、適用できる。17行目~33行目までは修正の必要はない。ただし、書き出しファイル名を変更したければ17行目を自分の好みのファイル目に修正する。主な修正箇所は、変数の定義:7行~11行(従属変数、独立変数、解像度、計算時間、初期値) 1階導関数の定義:37行~43行(関数形とパラメーター)

```

1 import java.io.*;
2
3 class Runge
4 {
5     public static void main(String arg[])
6     {
7         double n,t,dt,tmax,h1,h2,h3,h4;
8         // ルンゲ・クッタ法関連変数の定義
9
10        n = 100.0; // n 個体数(m)の初期値を入力
11        dt = 1.0; // dt 時間解像度(day)を入力
12        tmax = 120.0; // tmax 計算継続時間(day)を入力
13
14        Runge f=new Runge();
15
16        try
17        {
18            FileWriter fw=new FileWriter("Example5-1-Runge.data");
19
20            for(t = 0; t <= tmax; t += dt)
21            {
22                fw.write(+ t + " " + n + "\n");
23
24                h1 = dt*f.g(t,n);
25                h2 = dt*f.g(t+dt/2.0,n+h1/2.0);
26                h3 = dt*f.g(t+dt/2.0,n+h2/2.0);
27                h4 = dt*f.g(t+dt,n+h3);
28
29                n = n+(h1+2.0*h2+2.0*h3+h4)/6.0;
30            }
31            fw.close();
32        }
33        catch (Exception e)
34        {
35            System.out.println(e);
36        }
37    }
38
39    double g(double t,double n) // nの階導関数形の定義
40    {
41        double a3,a4; // 問題とする系のパラメーターの定義
42        a3 = 0.05; // a3 (day-1)
43        a4 = 0.00005; // a4 (匹-1・day-1)
44
45        return ((a3-a4*n)*n);
46    }
47
48 }
49
50
51
52 }

```

◀ 9 プログラムの簡単な説明

7行~12行: 変数を定義している。doubleとは倍精度の実数

18行目: データの書き出し Example5-1-Runge.data という名前のファイルが生成される。

20行~32行: 時間解像度ずつルンゲ・クッタ法で時間を進めている。24行~27行で使用されている1階の導関数gはプログラムの下の方で別途定義される。

43行~49行: 1階導関数の定義

43行目のgという関数を使用する独立変数(t)と従属変数(n)が定義されている。従属変数nは初期値から時間更新とともに逐次書き出されており、書き出されるデータファイル以外には残らない。49行目のreturnで具体的な関数形がパラメーターとともに定義されている。

図5.6 Javaによるルンゲ・クッタ法のプログラム例(1従属変数)◀9

1従属変数の常微分方程式には、このプログラムが修正の上、適用できる。16行目~41行目までは修正の必要はない。ただし、書き出しファイル名を変更したければ18行目を自分の好みのファイル目に修正する。主な修正箇所は、変数の定義:7行~12行(従属変数、独立変数、解像度、計算時間、初期値) 1階導関数の定義:43行~49行(関数形とパラメーター) 図5.5のオイラー法との違いは、20~32行までの時間更新だけであることがわかるだろう。

5.4 多元連立1階常微分方程式の数値解法

時間を独立変数 (t) として, 従属変数が温度 (T) と CO_2 濃度 (C) の2つであるとし, それらの関係が2つの1階常微分方程式で表現されよう^{◀1}. すなわち, 2元連立1階常微分方程式となる.

ステップ1 1階の導関数形の表現

$$\begin{aligned} \frac{dT}{dt} &= g_1(t, T, C), \quad \text{初期条件 } T(0) = T_0. \\ \frac{dC}{dt} &= g_2(t, T, C), \quad \text{初期条件 } C(0) = C_0. \end{aligned} \quad (5.11)$$

1階の導関数式の中に別の従属変数が含まれている点が, 1従属変数の場合と異なるだけである^{◀2}.

ステップ2 解像度の決定 独立変数, 従属変数それぞれに通し番号を付けて識別しておく.

$$\begin{aligned} t_0 &= 0, \quad t_1 = \Delta t, \quad t_2 = 2\Delta t, \quad \dots, \quad t_n = n\Delta t, \quad \dots, \quad t_{n_{\max}} = n_{\max}\Delta t. \\ T_0 &= T(0), \quad T_1 = T(\Delta t), \quad T_2 = T(2\Delta t), \quad \dots, \\ T_n &= T(n\Delta t), \quad \dots, \quad T_{n_{\max}} = T(n_{\max}\Delta t). \\ C_0 &= C(0), \quad C_1 = C(\Delta t), \quad C_2 = C(2\Delta t), \quad \dots, \\ C_n &= C(n\Delta t), \quad \dots, \quad C_{n_{\max}} = C(n_{\max}\Delta t). \end{aligned} \quad (5.12)$$

ステップ3 ルンゲ・クッタ法による差分化^{◀3} 従属変数は2つあるが, 1変数の解析方法を応用拡張する.

試射1 オイラー法によって Δt 秒後の仮予測値を求める. この第1試射による T_n, C_n からの Δt 秒後の変化量をそれぞれ, h_1, k_1 とする.

$$\begin{aligned} h_1 &= \Delta t g_1(t_n, T_n, C_n), \\ k_1 &= \Delta t g_2(t_n, T_n, C_n). \end{aligned} \quad (5.13)$$

試射2 オイラー法による現時刻座標と Δt 秒後の予測座標値の中間の座標 $(t_n + \Delta t/2, T_n + h_1/2, C_n + k_1/2)$ をステップ1で準備した2つの1階導関数にそれぞれ代入して, その点における時系列図曲線の傾きを求める. 現時刻の座標 (t_n, T_n, C_n) を起点として, 今度はこの傾きを用いて第2試射を行い, Δt 秒後の仮予測値を求める. この第2試射による T_n, C_n からの Δt 秒後の変化量を, それぞれ (h_2, k_2) とする.

$$\begin{aligned} h_2 &= \Delta t g_1\left(t_n + \frac{\Delta t}{2}, T_n + \frac{h_1}{2}, C_n + \frac{k_1}{2}\right), \\ k_2 &= \Delta t g_2\left(t_n + \frac{\Delta t}{2}, T_n + \frac{h_1}{2}, C_n + \frac{k_1}{2}\right). \end{aligned} \quad (5.14)$$

試射3 第2試射による現時刻座標と Δt 秒後の予測座標値の中間

◀1 数値解析法があらゆる常微分方程式に適用できることを示すために, この節では従属変数が複数ある場合 (つまり多元連立) を取り上げる. 5.3節までの手法が, 容易に拡張できることを学ぶ.

◀2 再び, 図5.2を参考にすれば, 右図の1階導関数3次元グラフを, 独立関数, 従属変数1, 従属変数2, 1階導関数の4次元グラフに置き換えることに相当する. 独立関数, 従属変数1, 従属変数2の座標値が与えられれば, 1階導関数の値が計算できることは, 5.3節までと同じである.

◀3 オイラー法の場合は, 5.2節と同様に, この試射1のみ使って予測値とすればよい.

の座標 $(t_n + \Delta t/2, T_n + h_2/2, C_n + k_2/2)$ をステップ1で準備した2つの1階導関数にそれぞれ代入して, それぞれの時系列図曲線の傾きを求める. 現時刻の座標 (t_n, T_n, C_n) を起点として, 今度はこの傾きを用いて第3試射を行い, Δt 秒後の仮予測値を求める. この第3試射による T_n, C_n からの Δt 秒後の変化量を, それぞれ h_3, k_3 とする.

$$\begin{aligned} h_3 &= \Delta t g_1\left(t_n + \frac{\Delta t}{2}, T_n + \frac{h_2}{2}, C_n + \frac{k_2}{2}\right), \\ k_3 &= \Delta t g_2\left(t_n + \frac{\Delta t}{2}, T_n + \frac{h_2}{2}, C_n + \frac{k_2}{2}\right). \end{aligned} \quad (5.15)$$

試射4 第3試射による Δt 秒後の予測座標値の座標 $(t_n + \Delta t, T_n + h_3, C_n + k_3)$ をステップ1で準備した2つの1階導関数にそれぞれ代入して, それぞれの時系列図曲線の傾きを求める. 現時刻の座標 (t_n, T_n, C_n) を起点として, 今度はこの傾きを用いて第4試射を行い, Δt 秒後の仮予測値を求める. この第4試射による T_n, C_n からの Δt 秒後の変化量を, それぞれ h_4, k_4 とする.

$$\begin{aligned} h_4 &= \Delta t g_1(t_n + \Delta t, T_n + h_3, C_n + k_3), \\ k_4 &= \Delta t g_2(t_n + \Delta t, T_n + h_3, C_n + k_3). \end{aligned} \quad (5.16)$$

予測値の決定 以上, 4階の試射から4つの異なる仮予測値が求めたので, それを以下のように重み付けして, Δt 秒後の最終的な従属変数の予測値とする.

$$\begin{aligned} T_{n+1} &= T_n + \frac{1}{6}(h_1 + 2h_2 + 2h_3 + h_4), \\ C_{n+1} &= C_n + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4). \end{aligned} \quad (5.17)$$

従属変数が3つ以上存在する多元連立常微分方程式の場合も, 同様の手続きで拡張すればよい^{◀4}.

◀4 3従属変数の場合は, 以下のようなになる. ただし, 追加する従属変数を Y_n とした.

$$\begin{aligned} h_1 &= \Delta t g_1(t_n, T_n, C_n, Y_n), \\ k_1 &= \Delta t g_2(t_n, T_n, C_n, Y_n), \\ l_1 &= \Delta t g_3(t_n, T_n, C_n, Y_n), \\ &\vdots \\ T_{n+1} &= T_n + \frac{1}{6}(h_1 + 2h_2 + 2h_3 + h_4), \\ C_{n+1} &= C_n + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4), \\ Y_{n+1} &= Y_n + \frac{1}{6}(l_1 + 2l_2 + 2l_3 + l_4). \end{aligned}$$

5.5 n 階常微分方程式の数値解法

n 階常微分方程式の場合は, n 元の連立1階常微分方程式に置き換えることによって, 5.4節の多元連立1階常微分方程式の解法をそのまま適用することが出来る.

● 2階の常微分方程式

以下のような2階の非線形常微分方程式の厳密解は容易に求められそうにない^{◀1}.

$$\frac{d^2T}{dt^2} + a(t) \left[\frac{dT}{dt} \right]^n + b(t) \left[\frac{dT}{dt} \right] + c(t) T^p = d(t), \quad (5.18)$$

◀1 数値解析法が優れている点は, この例のように, 係数が非線形となるような複雑な常微分方程式であっても, 解法のアルゴリズム自体は, 変更しなくてよい点である.